# LE JOURNAL DE PHYSIQUE

ET

# LE RADIUM


## RECHERCHE DE LA RADIOACTIVITÉ β DOUBLE DE $^{116}$Cd


Par JEAN-FRANÇOIS DETŒUF et RAYMOND MOCH,

Laboratoire de Physique atomique et moléculaire, Collège de France.



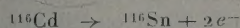
**Sommaire.** — Des mesures ont été faites pour tenter de mettre en évidence une éventuelle radioactivité β double de $^{116}$Cd conforme au schéma de Furry. La méthode utilisée, qui était celle des coïncidences entre compteurs à scintillations placés de part et d'autre de la source, permettait la mesure de l'énergie de chacune des particules émises.

On a trouvé pour la vie moyenne une limite inférieure égale à $0{,}6 \cdot 10^{17}$ ans qui ne confirme ni n'infirme l'hypothèse d'un phénomène sans émission de neutrino. La comparaison avec les autres résultats connus montre que le problème demeure à peu près entier et que de nouvelles expériences sont souhaitables.


Le cadmium 116 est, avec $^{150}$Nd, $^{48}$Ca, $^{96}$Zr et $^{82}$Se, l'un des cinq noyaux pour lesquels l'énergie disponible dans une transition β double [1], [2] est la plus grande [3], [4]. En comparant les valeurs des masses obtenues par spectrométrie et celles déduites des formules semi-empiriques [5], on peut évaluer la différence de masse nucléaire

$$E_0 = {}^{116}\text{Cd} - {}^{116}\text{Sn} = 3{,}79 \pm 0{,}37 \text{ MeV}.$$

Le but de notre étude expérimentale a été de mettre en évidence une radioactivité β double du cadmium 116 présentant les caractères de la théorie de Furry [6], c'est-à-dire un processus sans émission de neutrino, du type



$$^{116}\text{Cd} \rightarrow {}^{116}\text{Sn} + 2e^-$$

dans lequel la somme $E_c$ des énergies cinétiques des électrons émis serait constante et égale à 2,77 MeV.

**1. Dispositif expérimental.** — La source à étudier est placée entre deux compteurs à scintillations $C_1$ et $C_2$. On enregistre simultanément les amplitudes des impulsions produites en coïncidence dans les deux compteurs. Si ces impulsions sont dues aux deux électrons provenant d'une désintégration β double suivant le schéma de Furry, la somme $E$ des énergies correspondantes doit être égale à l'énergie cinétique $E_c$ disponible dans la transition. On peut tracer le spectre de la somme $E$ pour le corps que l'on étudie et pour un corps stable de référence. La radioactivité β double doit se traduire par une augmentation pour le premier corps du nombre de coups au voisinage de $E = E_c$.

Les compteurs $C_1$ et $C_2$, constitués chacun par un photomultiplicateur EMI 6260 et un scintillateur plastique, sont protégés du rayonnement environnant par un château de plomb et par un rideau de compteurs de Geiger montés en anticoïncidence avec $C_1$ et $C_2$.

Les photomultiplicateurs ont une cathode de 4 cm de diamètre. Essayés avec un cristal d'iodure de sodium pour les rayons γ d'annihilation (0,51 MeV) d'une source de $^{22}$Na, les deux photomultiplicateurs ont donné une raie définie par une largeur à mi-hauteur de 12 pour 100.

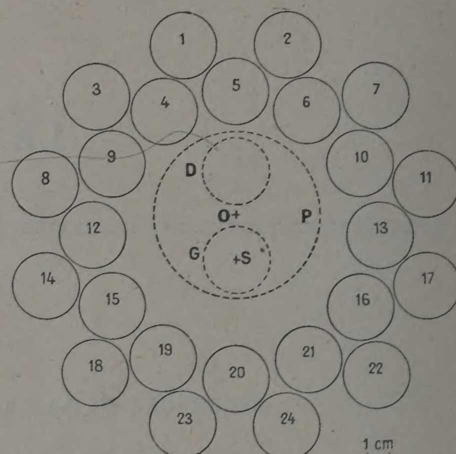
Les scintillateurs utilisés sont des plastiques du C. E. A. (solution de tétraphénylbutadiène dans le métacrylate), recouverts sur leur face antérieure d'une feuille d'aluminium de 0,02 mm d'épaisseur. Leur diamètre est de 40 mm et leur épaisseur (18 mm) a été choisie en tenant compte du fait qu'on trouve dans le spectre du bruit de fond un pic dont l'abscisse varie en fonction de l'épaisseur des scintillateurs, et qu'il y a intérêt à rencontrer nettement en dehors de l'intervalle d'énergie intéressant (il apparaît aux environs de 5,5 MeV sur la figure 4); ce pic est dû à des rayons cosmiques de grande énergie qui traversent les compteurs au voisinage du minimum d'ionisation, et y abandonnent une quantité d'énergie sensiblement constante et proportionnelle à l'épaisseur.

La source et l'élément de référence que nous avons utilisés sont deux isotopes du cadmium, obtenus par séparation magnétique à l'Atomic Energy Research Establishment de Harwell. Pour réduire les erreurs découlant d'une contamination possible pendant la séparation, nous avons eu recours à deux échantillons séparés dans une même opération. Les échantillons contenaient l'un 80 mg de $^{116}$Cd, présumé radioactif β double, l'autre 80 mg de $^{114}$Cd, considéré comme stable, les abondances isotopiques étant respectivement de 81 pour 100 pour l'échantillon de $^{116}$Cd et de 95,3 pour 100 pour l'échantillon de $^{114}$Cd. Nous en avons fait deux sources de sulfure de cadmium, déposées par gravitation, à partir d'une suspension dans l'acétone, sur une feuille d'aluminium de 0,01 mm d'épaisseur et de 35 mm de diamètre. L'épaisseur des sources obtenues est d'environ 12 mg/cm². Les sources sont montées symétriquement sur un disque d'a uminium de 8 cm de diamètre, placé entre les deux compteurs $C_1$ et $C_2$, et qu'un dispositif mécanique permet de faire pivoter de l'extérieur du château de plomb afin d'amener l'une ou l'autre source entre les deux compteurs. La distance de la source à la face d'entrée de chacun des deux compteurs est de 0,3 cm.

Les électrons provenant de la source ont, avant de pénétrer dans les scintillateurs, à traverser une épaisseur de matière qui est au maximum de 17 mg/cm², ce qui pour des électrons d'énergie supérieure à 200 keV représente une perte maximum d'énergie de 35 keV.

La protection est assurée par un château de plomb de 10 cm d'épaisseur dont les dimensions intérieures sont les suivantes : longueur, 75 cm; hauteur, 25 cm; largeur, 25 cm. A l'intérieur de ce château, se trouve une couronne de compteurs de Geiger (20 th Century, type G 60) de 3,6 cm de diamètre (longueur de la cathode : 67 cm) disposée comme l'indique la figure 1.

2. **Principe de l'enregistrement.** — A une coïncidence provoquée dans les compteurs $C_1$ et $C_2$ par deux électrons d'énergie $E_1$ et $E_2$, correspond dans chaque canal une impulsion qui est transformée électroniquement en signal triangulaire d'amplitude $x_0$ ou $y_0$ ayant un temps de montée relativement rapide (0,3 μs) et un temps de descente compris entre 10 et 500 μs suivant l'amplitude; la pente est de 0,3 V/μs. Ces signaux sont appliqués aux plaques d'un tube cathodique (plaques X pour le signal de $C_1$, plaques Y pour le signal de $C_2$).



1 à 24 – Compteurs de Geiger. – P – Porte-sources. – O – Axe de rotation du porte-sources. – D et G. – Source et échantillon de référence. – S – Axe des compteurs à scintillations.

Fig. 1.

Considérons la trajectoire du spot sur l'écran (*fig.* 2). Nous supposerons, pour fixer les idées, $y_0$ supérieur à $x_0$. Le spot monte rapidement au point M de coordonnées $x_0$ et $y_0$, puis $x$ et $y$ décroissent linéairement en fonction du temps à la même vitesse.

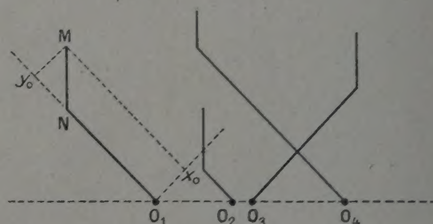


Fig. 2.

Le spot décrit le segment MN parallèle à la première bissectrice; $y_0$ étant plus grand que $x_0$, $x$ s'annule avant $y$ et reste nul. A partir de ce moment, le spot décrit le segment $NO_1$ de l'axe O$x$. En agissant sur la grille de commande du tube cathodique, on s'arrange pour que le spot ne soit lumineux que pendant une durée de 500 μs après chaque coïncidence.

Si l'on photographie l'écran sur un film se déroulant de façon continue à une vitesse lente, la direction de déroulement étant parallèle à la deuxième bissectrice, on aura une série de traces correspondant aux coïncidences successives (*fig.* 2), et sur chaque

trace on peut mesurer $x_1$ et $y_1$, d'où l'on peut déduire les énergies $E_1$ et $E_2$ des particules en coïncidence.

**3. Schéma général de l'électronique** (*fig.* 3). — Sur chaque canal l'impulsion, prise sur la dernière dynode du photomultiplicateur, attaque un préamplificateur voisin de celui-ci. L'impulsion est alors envoyée d'une part sur un sélecteur de coïncidences relativement rapide (temps de résolution : $1,5 \cdot 10^{-7}$ s), d'autre part sur un amplificateur (Mesco AL 01) dont la réponse est linéaire pour des impulsions atteignant à la sortie 150 V. Ce sont ces impulsions qui, mises sous forme triangulaire, sont appliquées directement aux plaques du tube cathodique.

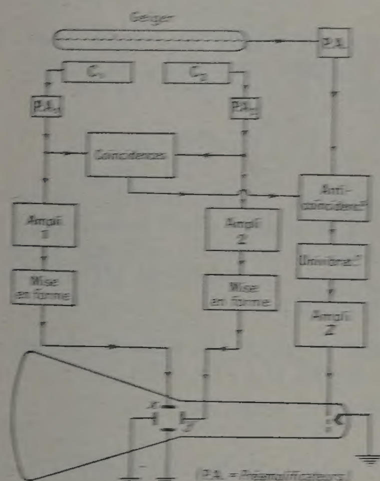



Fig. 3.

Les impulsions des compteurs de Geiger, montés en parallèle, sont envoyées par l'intermédiaire d'un préamplificateur sur la voie de blocage d'un sélecteur d'anticoïncidences (C. E. A. type A 422), dont la voie d'entrée est attaquée par les impulsions du sélecteur de coïncidences. Les impulsions de sortie du sélecteur d'anticoïncidences sont mises sous forme d'un signal rectangulaire de 500 μs qui attaque la grille de commande du tube cathodique par l'intermédiaire de l'amplificateur *Z* incorporé à l'oscillographe (Dumont 248 A). La polarisation est telle qu'en l'absence d'impulsion l'écran ne soit pas illuminé.

**4. Enregistrement photographique.** — L'enregistrement se fait à l'aide d'un appareil Foca f = 3,5 cm, muni d'une bonnette de deux dioptries; il a été modifié de façon à pouvoir entraîner le film de manière continue et peut fonctionner pendant 12 h sans être rechargé. Toutes les heures, un signal repère est enregistré sur la pellicule. Pour le dépouillement, le film développé est projeté à l'aide d'un agrandisseur (grandissement 10) sur une feuille de papier millimétré dont les axes correspondent aux directions O*x* et O*y* de l'oscillographe. La précision de la lecture est de ± 0,5 mm, c'est-à-dire ± 40 keV sur chaque coordonnée.

**5. Étalonnage.** — L'étalonnage de chacun des compteurs a été fait à l'aide des rayons γ du sodium 22 (1,28 MeV) et du thorium *C*″ (2,62 MeV).

**6. Expériences.** — Dans la bande d'énergie intéressante (2,0 à 3,5 MeV), le nombre de coïncidences dues au bruit de fond est de l'ordre de 1 coup/h. Pour avoir une statistique convenable, la mesure doit donc durer quelques centaines d'heures. Les deux échantillons ont été étudiés alternativement pendant des intervalles de 5 à 10 h. Le rythme prévu était le suivant :

| Nuit. | Jour. | | Nuit. | Jour. | | Nuit. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| D. | G. | D. | G. | D. | G. | D. |
| 10 h | 5 h | 5 h | 10 h | 5 h | 5 h | 10 h |

Ce rythme répartit les risques de variations diurnes. Nous avons désigné ci-dessus les échantillons par G et D (gauche et droite). En effet, afin de diminuer l'influence du coefficient personnel dans le dépouillement, nous avons ignoré jusqu'à la fin des expériences quel était l'échantillon de $^{116}$Cd et quel était celui de $^{114}$Cd.

Chaque jour ont été effectués des contrôles systématiques qui consistaient : 1° à vérifier la stabilité des amplificateurs en photographiant les impulsions triangulaires produites en envoyant à l'entrée de chaque amplificateur un signal d'amplitude donnée; des variations supérieures à 3 pour 100 (1 mm à l'agrandisseur) ont entraîné l'annulation des mesures faites depuis le précédent contrôle et la vérification de l'électronique; 2° à vérifier la stabilité des compteurs à scintillations en photographiant sur chaque canal le spectre de $^{22}$Na et celui du thorium. Des variations supérieures à 10 pour 100 ont entraîné l'annulation des mesures faites depuis la vérification antérieure; 3° à contrôler que le taux de comptage des compteurs de Geiger reste au voisinage de 1 350 coups/mn.

**7. Résultats.** — Nous avons retenu au total 400 h d'enregistrement, soit 200 h pour chacun des échantillons. Le nombre total des traces enregistrées a été de 6 986. Cependant, nous n'avons mesuré que celles correspondant à une somme des énergies supérieure à 1,5 MeV. Le nombre des traces mesurées est alors de 1 467. Pour chacun des deux échantillons, nous avons cherché le spectre de la somme des énergies, c'est-à-dire le nombre *D*(*E*) ou *G*(*E*) de traces correspondant à une énergie comprise dans

la bande $\left(E - \frac{\Delta E}{2},\ E + \frac{\Delta E}{2}\right)$, en admettant que ces traces sont dues à des électrons. La largeur $\Delta E$ des bandes a été prise égale à 0,5 MeV. Les résultats sont consignés dans la figure 4.

Nous avons appelé, sur la figure 4, *grandes impulsions* celles qui saturent l'un ou l'autre des deux amplificateurs, c'est-à-dire qui correspondent à des particules ayant abandonné dans un des compteurs une énergie supérieure à 4,5 MeV. La présence de

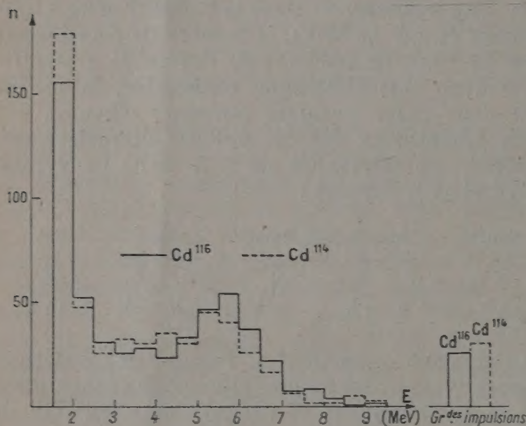



Fig. 4.

ces impulsions risque de modifier légèrement le spectre au-delà de 4,5 MeV, mais cette région n'est pas celle qui nous intéresse du point de vue de la radioactivité β double.

**8. Interprétation.** — Si l'on calcule dans chaque bande l'écart réduit

$$\xi = \frac{D - N}{\sqrt{2N}} \qquad \left(\text{avec } N = \frac{D + G}{2}\right),$$

on vérifie que ses valeurs ne sont pas supérieures à celles que l'on aurait obtenues si les deux échantillons avaient été identiques.

Si nous admettons pour l'ensemble de notre appareil un pouvoir de résolution (largeur à mi-hauteur) de 0,5 MeV, 98 pour 100 des coups doivent tomber dans trois bandes consécutives de 0,5 MeV de large. Comme l'énergie dans le cas de $^{116}$Cd est comprise entre 2,5 et 3 MeV, il nous suffira d'étudier les trois bandes comprises entre 2 et 3,5 MeV.

Dans l'ensemble de ces trois bandes, l'échantillon de $^{116}$Cd a donné 109 coups en 200 h, l'échantillon de $^{114}$Cd 106 coups. L'écart entre les deux, $\varepsilon = 3$, est très nettement inférieur à l'écart statistique.

On peut prendre pour limite supérieure du nombre moyen de coups supplémentaires dus à l'activité du cadmium 116 une valeur $c < \frac{37}{200}$ coups/h. Pour cette valeur $\frac{37}{200}$, en effet, la probabilité d'avoir l'écart $\varepsilon = 3$ est dix fois plus faible que si les deux échantillons étaient identiques.

L'angle solide moyen sous lequel l'un des compteurs est vu de la source est de l'ordre de $0,4 \times 4\pi$. Tenant compte d'un facteur de corrélation angulaire en $(1 + \cos\theta)$, proposé par Primakoff [7], qui diminuerait de 25 pour 100 la probabilité d'émission des deux électrons de part et d'autre de la source, on déduit une limite inférieure pour la vie moyenne $\tau$ de $^{116}$Cd, soit

$$\tau > 0,6.10^{17} \text{ ans.}$$

Une erreur, d'ailleurs improbable, dans l'évaluation de l'énergie disponible, modifierait peu ce résultat. Pour $E_c = 2,0$ MeV, on aurait

$$\tau > 0,3,10^{17} \text{ ans.}$$

**9. Discussion.** — Ce résultat ne permet pas d'exclure la possibilité d'une radioactivité β double sans émission de neutrino, conforme au schéma de Furry. Le calcul de Primakoff [7], avec les hypothèses suivantes :

— transition sans changement de spin ni de parité du noyau ($\Delta J = 0$ non);

— interaction tensorielle;

$$-\ |M'|^2 = \left| \int \psi_f^* \left[ \sum_{jq} \tau_j^+ \tau_k^+ (\vec{\sigma}_i . \vec{\sigma}_k) \right] \psi_i \right|^2 = 0,01$$

(par analogie avec les éléments de matrice de la radioactivité β ordinaire);

— $G = 4.10^{-12}$;

— $Z = 48$,

prévoit pour l'énergie $E_0 = 3,79$ MeV une valeur de $\tau$ égale à $2,1.10^{16}$ ans, qui est donc un peu inférieure à notre limite. Mais la valeur choisie pour $|M'|^2$ est assez arbitraire, et il n'est pas exclu qu'elle soit trop forte. L'étude théorique et expérimentale [8], [9] des spins et des parités des premiers états des noyaux de type pair-pair montre par ailleurs qu'il est improbable d'observer des transitions autres que ($\Delta J = 0$, non). L'interaction scalaire conduirait pour les transitions ($\Delta J = 0$, non) à des vies moyennes plus longues que l'interaction tensorielle. On peut admettre enfin que, comme dans la théorie de la radioactivité β, les autres types d'interaction interviennent peu.

L'ensemble des résultats intéressants actuellement disponibles au sujet de la radioactivité β double est résumé sur la figure 5, dont les abscisses représentent

'énergie cinétique disponible $E$ en unités mc² (évaluée pour les corps considérés par l'un d'entre nous [4], [5]) et les ordonnées le logarithme de la vie moyenne.

La courbe en trait plein représente la valeur de la vie moyenne résultant du calcul effectué par Primakoff avec les hypothèses indiquées plus haut. La courbe en pointillé est valable dans les mêmes conditions pour $Z = 90$. La courbe en trait interrompu représente les valeurs résultant de la théorie de M. Gœppert-Mayer [10] pour $Z = 48$.

Fig. 5.

Dans trois cas (représentés sur la figure 5 par les croix), la vie moyenne semble avoir été effectivement mesurée. Dans les autres cas, représentés par des flèches, seule une limite inférieure a été indiquée pour la vie moyenne.

Trois résultats seulement sont significatifs, mais se trouvent en contradiction entre eux. Les longues vies moyennes observées pour $^{238}$U [17] et $^{130}$Te [16] semblent indiquer qu'il n'y a pas de radioactivité β double suivant le schéma de Furry. Mais le résultat de Mc Carthy sur $^{48}$Ca [11] repose le problème de l'existence d'une radioactivité β double sans émission de neutrino car, quoique la vie moyenne soit plus longue que la valeur prévue par le calcul de Primakoff, l'expérience indiquerait la constance de la somme des énergies. Les résultats antérieurs de Fulbright et Mc Carthy sur $^{96}$Zr [15] sont, selon nous à considérer avec une certaine prudence.

Il apparaît nécessaire actuellement, d'une part de confirmer le résultat de Mc Carthy, d'autre part de reprendre les expériences sur un élément comme $^{150}$Nd pour lequel l'énergie disponible $E_0$ doit être voisine de 10 mc².

Pour une discussion plus complète de ces résultats, on se reportera à [2] et [4].

*Note ajoutée à la correction des épreuves.* — Utilisant une chambre de Wilson, R. G. Winter (*Pys. Rev.*, 1955, **99**, 88) a trouvé pour $^{116}$Cd

$$\tau \geqq 10^{17} \text{ ans},$$

ce qui corrobore notre résultat, et pour $^{100}$Mo

$$\tau \geqq 3.10^{17} \text{ ans}.$$

M. Awschalom (*Phys. Rev.*, à paraître) a obtenu pour $^{96}$Zr

$$\tau \geqq 0,36.10^{18} \text{ ans}$$

et pour $^{48}$Ca

$$\tau \geqq 1,1.10^{18} \text{ ans}$$

se trouvant ainsi, dans le cas de $^{48}$Ca, en désaccord formel avec Mc Carthy.

Manuscrit reçu le 8 juillet 1955.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Detœuf, Moch et Salmon. — *J. Physique Rad.*, 1952, **13**, 618.
[2] Zeldovitch, Lukyanov et Smorodinsky. — Progrès des Sciences Physiques U. R. S. S., 1954, **54**, n° 3.
[3] Mc Carthy. — *Phys. Rev.*, 1954, **95**, 447.
[4] Detœuf. — *Thèse Sciences Physiques*, Paris, 1955.
[5] Detœuf. — *J. Physique Rad.*, à paraître.
[6] Furry. — *Phys. Rev.*, 1939, **56**, 1185.
[7] Primakoff. — *Phys. Rev.*, 1952, **85**, 888.
[8] Scharff-Goldhaber. — *Phys. Rev.*, 1953, **90**, 587.
[9] Glaubman. — *Phys. Rev.*, 1953, **90**, 1000.
[10] Gœppert-Mayer. — *Phys. Rev.*, 1935, **48**, 512.
[11] Mc Carthy. — *Phys. Rev.*, 1955, **97**, 1234.
[12] Fremlin et Walters. — *Proc. Phys. Soc.*, 1952, **65**, 911.
[13] Winter. — *Phys. Rev.*, 1951, **83**, 1070.
[14] Kalkstein et Libby. — *Phys. Rev.*, 1952, **85**, 368.
[15] Fulbright. — *Physica*, 1952, **18**, 1026.
[16] Ingham et Reynolds. — *Phys. Rev.*, 1950, **78**, 822.
[17] Leviné, Ghiorso et Seaborg. — *Phys. Rev.*, 1950, **77**, 296.

# SUR LA DÉTERMINATION EXPÉRIMENTALE DES TENSIONS APPLIQUÉES PAR LES ONDES ULTRASONORES SUR LES OBSTACLES

Par Belkis OZDOGAN.

**Sommaire.** — L'étude comparative des efforts normaux et tangentiels exercés par des ondes ultrasonores planes rencontrant une surface plane partiellement réfléchissante, sous des angles d'incidence variables, permet d'atteindre le pouvoir réflecteur énergétique. Diverses observations et mesures ont été faites à l'aide d'un dispositif ci-dessous décrit; des valeurs numériques ont pu être obtenues avec des revêtements tels que la stéarine et la paraffine pour des ondes ultrasonores (de fréquence 1,5 Mc/s) se propageant dans l'eau.

1. **Introduction.** — *Actions mécaniques des ultrasons.* — On sait depuis longtemps que les ondes acoustiques exercent des actions mécaniques diverses sur les obstacles (absorbants ou réflecteurs). Ces actions ont été utilisées par P. Langevin dès 1916 comme moyen d'étude des ultrasons. Pour définir les efforts à l'intérieur d'un liquide soumis à des ondes acoustiques, M. R. Lucas a montré récemment [1] que l'on peut suivre une voie analogue à celle utilisée en élasticité pour l'étude des contraintes d'un solide. Soit $r$ le pouvoir réflecteur énergétique d'une surface M et un faisceau d'ondes incidentes planes : supposons qu'une partie de la densité d'énergie incidente $W$ soit absorbée par M et que l'autre partie $rW$ soit régulièrement réfléchie par elle. En considérant ce double rôle de M, on trouve pour l'effort tangentiel $T$ et l'effort normal $N$ par unité de surface les expressions suivantes, dans lesquelles $i$ désigne l'angle d'incidence

$$\left.\begin{aligned} T &= W(1-r)\sin i\cos i,\\ N &= W(1+r)\cos^2 i;\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

R. Lucas a signalé que l'effort tangentiel peut être mis en évidence par un pendule de torsion représenté sur la figure 1 *a*, alors que l'effort normal l'est par le dispositif habituel de la figure 1 *b*.

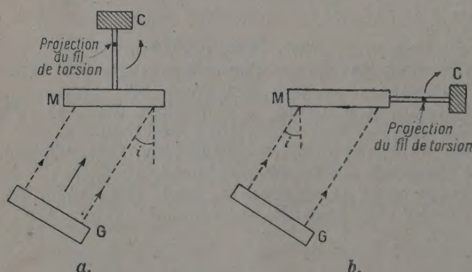



Fig. 1. — G, générateur; M, réflecteur; C, contrepoids.

Quand on connaît l'angle d'incidence $i$, la détermination de ces deux efforts permettra de calculer le pouvoir réflecteur $r$ de M, ce qui constitue l'objet de la partie expérimentale de notre travail. On déduit des équations (1), l'expression

$$r = \frac{\frac{N}{T}\operatorname{tg} i - 1}{\frac{N}{T}\operatorname{tg} i + 1}. \qquad (2)$$

2. **Dispositif expérimental.** — 1° *Les pendules* — Pour la détermination des efforts $N$ et $T$, nous avons utilisé les deux pendules (*fig.* 1 *a* et 1 *b*), possédant des réflecteurs identiques entre eux, de dimensions : rayon $R$ = 10 mm, épaisseur $d$ = 3 mm. Chacun de ces réflecteurs a la forme d'une boîte plate contenant de l'air pour qu'on puisse le considérer comme parfaitement réfléchissant. Le bras de levier du pendule normal est de 30 mm et celui du pendule tangentiel est de 40 mm. La distance latérale du réflecteur à la tige principale du pendule pour $N$ est de 3 mm. Les fils de suspension sont en bronze de 0,1 mm de diamètre, possédant chacun une longueur de 60 mm. L'extrémité supérieure de la tige C' porte un cadran divisé muni d'un vernier, tandis que la tige C porte un petit miroir concave permettant, sur une échelle, la détermination des déviations du pendule.

2° *Source d'ultrasons.* — Un cristal de quartz, de 56,5 mm de diamètre et 2 mm d'épaisseur, produit des ultrasons de fréquence 1,5 Mc/s; les électrodes sont en or. Le cristal est excité par un oscillateur à self variable alimenté par une tension stabilisée. La fréquence de l'oscillateur et la tension de sortie sont contrôlées, respectivement par un ondemètre

[1] R. Lucas, Sur les tensions des radiations des ondes acoustiques, Suppl. *Nuovo Cimento*, 1950, **7**, 236.

de précision et par un voltmétre électronique. On a toujours trouvé qu'elles ne varient pas.

Fig. 2 *a*.

Fig. 2 *b*.

3° *Support du quartz.* — C'est une boîte étanche à l'eau (*fig.* 3). Sur la figure, D représente un anneau cylindrique ayant les faces de contact dorées, ce qui empêche la formation de pile entre la boîte et le quartz. Le support possède d'autre part deux vis micrométriques permettant l'une le déplacement vertical du support et l'autre rendant possible l'orientation du quartz suivant une direction voulue.

4° *Récipient.* — C'est une cuve vitrée, étanche à l'eau et ayant pour dimensions 30×30×60 cm. Le quartz qui est situé à une distance de quelques centimètres d'une extrémité de la cuve, a sa normale dirigée suivant un axe horizontal, tandis que le système portant l'un des pendules est installé à l'autre extrémité de la cuve de telle manière que la normale au réflecteur fasse un angle de 45° avec celle du quartz. Pour le réglage de cet angle nous avons utilisé, après avoir vidé l'eau de la cuve, le système optique représenté par la figure 4, $A_1$ et $A_2$ étant des petits miroirs plans et M un petit prisme à réflexion totale; on les colle tous deux sur les faces du quartz et du réflecteur avec un peu de vaseline (sur la figure 4 les dimensions des miroirs et celles du prisme sont exagérées pour la clarté de la figure). Un autocollimateur permet l'observation des lumières réfléchies. Enfin un absorbant acoustique placé sur la surface intérieure de la cuve évite la réflexion des ultrasons sur la face du récipient.

5° *Principe des mesures.* — Un de nos pendules de torsion placé dans la cuve remplie d'eau sera soumis, quand on crée le champ ultrasonore à l'action d'un moment $M$. Désignons par $M_T$ le moment provoqué par l'effort $T$ pour le pendule tangentiel et par $M_N$ celui dû à l'effort $N$ pour le pendule normal; on aura

Fig. 3.

Fig. 4.

$$M_T = TSl = C\alpha_T,$$
$$M_N = NSl' = C\alpha_N$$

$S$, surface d'un réflecteur; $l$, $l'$, bras de leviers respectifs des pendules servant à mesurer $T$ et $N$; $C$, coefficient de torsion du fil; $\alpha_T$ et $\alpha_N$, déviations

angulaires respectives correspondant aux réflecteurs couverts par un absorbant. Nous tirons des expressions précédentes

$$\frac{N}{T} = \frac{l}{l'}\,\frac{\alpha_N}{\alpha_T} = \frac{\alpha_N}{\frac{3}{4}\alpha_T}, \tag{3}$$

car $\frac{l'}{l} = \frac{3}{4}$ d'après la construction. La détermination des angles de torsion de chacun des pendules se fait de la façon suivante : on note d'abord la division d'échelle correspondant à l'état du quartz au repos; puis on le fait vibrer, le pendule dévie d'autant plus que l'effort appliqué est plus grand. On tourne ensuite le tambour de la tête du pendule en sens inverse jusqu'à trouver la division d'échelle correspondant au quartz au repos et on lit le nombre de divisions parcourues qui mesure la déviation du pendule. En collant sur la face du réflecteur des pendules, de la matière absorbante (paraffine ou stéarine), on répète l'expérience successivement avec des épaisseurs $e$ différentes. Les expressions (2) et (3) permettent alors de tracer les courbes

$$r = f(e). \tag{4}$$

6° *Préparation des surfaces partiellement réfléchissantes.* — On prend un cristallisoir de diamètre un peu plus grand que celui du réflecteur et contenant du mercure. On place sur le mercure des morceaux de paraffine ou de stéarine que l'on chauffe avec précaution jusqu'à ce que la paraffine ou la stéarine deviennent liquides. Ensuite on laisse refroidir dans un endroit tranquille pour ne pas perturber la surface de la couche de l'absorbant en formation. La couche ainsi obtenue qui peut être facilement séparable du mercure, a des faces bien planes et parallèles. En changeant la quantité de substance déposée sur le mercure, on obtient des couches d'épaisseurs différentes. De ces couches on découpe des morceaux par l'intermédiaire de l'extrémité tranchante d'un tuyau de diamètre équivalent à celui du réflecteur. Pour couvrir les réflecteurs avec l'absorbant, on dépose soigneusement le morceau obtenu sur la face rendue horizontale du réflecteur légèrement chauffé, l'absorbant adhère sous l'action de son propre poids. Les couches qui n'adhèrent pas bien et celles qui ont des surfaces non uniformes se reconnaissent facilement à partir des résultats expérimentaux.

7° *Observations sur les difficultés rencontrées.* — *a.* La face en vibration du quartz fait naître des courants liquides de convection produisant un effet nuisible sur le pendule. On l'évite en plaçant au voisinage immédiat du quartz un rideau vertical en nylon. On a vérifié que ce rideau n'est pas absorbant.

*b.* Les bulles d'air qui se dégagent de l'eau contenue dans le récipient sont retenues par la face du réflecteur. Elles modifient le pouvoir réflecteur de la face. Le dégazage est d'autant plus abondant que la différence entre la température de l'eau et celle de la pièce est plus grande. C'est pourquoi il est recommandé d'utiliser de l'eau à la température du laboratoire et d'enlever les bulles formées avec un pinceau.

*c.* Nous avons toujours observé une fluctuation de la position des pendules, mais elle est de l'ordre de 2/100e des déviations. D'autre part, si la distance du quartz au réflecteur est grande (supérieure, par exemple, à 50 cm), il apparaît de plus, un mouvement oscillatoire du pendule de torsion de grande période. On l'évite en diminuant cette distance.

3. **Corrections.** — Nous avons jusqu'à maintenant admis que les déviations $\alpha_N$ et $\alpha_T$ lues sur le cadran proviennent uniquement des efforts $N$ et $T$. Or les figures 5 *a* et 5 *b* montrent qu'il n'en est rien.

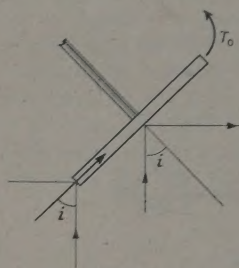


Fig. 5 *a*.

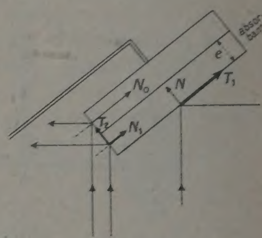


Fig. 5 *b*.

On y voit que pour le pendule servant à déterminer l'effort tangentiel, il intervient, par suite des réflexions sur le bord, un effort résultant $T_0$; pour l'autre pendule, on a encore un effort $N_0$ provenant du bord et de plus des efforts $N_1$, $T_1$ et $T_2$ au bord et à la face de l'absorbant. Une déviation $\alpha_{N'}$ observée sur le tambour et correspondant au pendule pour l'effort $N$, par exemple, sera alors due à l'ensemble des efforts $N$, $N_0$, $N_1$, $T_1$ et $T_2$; de même, la déviation $\alpha_{T'}$ observée pour le cas du pendule tangentiel sera la résultante des déviations dues aux efforts $T$ et $T_0$. Les déviations $\alpha_N$ et $\alpha_T$ de la formule (3) s'obtiennent alors, en retranchant des déviations globales $\alpha_{N'}$ et $\alpha_{T'}$ mesurées expérimentalement, les déviations dues aux efforts parasites que nous venons de signaler. Considérons d'abord, pour voir ces corrections, le cas du pendule (*fig.* 2 *b*). Le réflecteur sans absorbant est une surface parfaitement réfléchissante. D'après les relations (1), comme $r = 1$, on doit avoir [d'après (1)], $T = 0$, par suite on doit trouver une déviation nulle. Pourtant l'expérience montre qu'il existe une déviation. C'est l'effort $T_0$ de la figure 5 *a* qui en est la cause. On a trouvé que la déviation $\alpha_{T_0}$ est de

$$\alpha_{T_0} = 7{,}7 - 0{,}19.$$

Nous devons donc retrancher $\alpha_{T_0}$ de $\alpha_{T'}$ trouvée avec l'absorbant. On aura alors

$$\alpha_T = \alpha_{T'} - 7,7.$$

Désignons par $M_{T_0}$ le moment de $T_0$. En se reportant à la figure 5 *a*, on trouve

$$M_{T_0} = C\alpha_0 = T_0(4 + 0,15)S, \qquad (4)$$

puisque $l = 4 + 0,15$. Considérons maintenant le pendule de la figure 5 *b*. Comme les deux pendules ont la même dimension, l'effort $N_0$ devient égal à $T_0$, mais son moment $M_{N_0}$ est différent de $M_{T_0}$, puisque les bras de leviers ne sont pas égaux. On a de la figure 5 *b*

$$M_{N_0} = C\alpha_0 = T_0(0,3 + 0,15)S. \qquad (5)$$

Les relations (4) et (5) donnent

$$\frac{\alpha_{T_0}}{\alpha_0} = \frac{4,15}{0,45}, \qquad \text{d'où} \qquad \alpha_0 = 0,8.$$

Calculons le moment de l'effort $T_1$, celui-ci égal à l'effort $T$. Or, en se reportant à la figure 5 *b*, on trouve

$$M_T = 4TS = C\alpha_T. \qquad (6)$$

D'autre part, le bras de levier de $T_1$ est $l + 0,3 + 0,3$, d'où

$$M_{T_1} = \frac{M_T}{4} S(0,6 + e) = C\alpha_{T_1}, \qquad (7)$$

où *e* est l'épaisseur de l'absorbant.

(6) et (7) donnent

$$\alpha_{T_1} = \frac{\alpha_T}{4}(0,6 + e).$$

L'effet qui provient de l'effort $N_1$ peut être considéré comme négligeable, car l'effort et son bras de levier sont des grandeurs petites; il en est de même pour le pendule tangentiel. L'angle $\alpha_N$ a donc comme expression

$$\alpha_N = \alpha_{N'} - \left[0,8 + \frac{\alpha_T}{4}(0,6 + e)\right] \qquad (8)$$

et en posant

$$\Delta = 0,8 + \frac{\alpha_T}{4}(0,6 + e),$$

on a donc de (2) et de (7)

$$r = \frac{\alpha_{N'} - \Delta - \frac{3}{4}\alpha_T}{\alpha_{N'} - \Delta + \frac{3}{4}\alpha_T}. \qquad (9)$$

4. **Résultats.** — Les tableaux I et I′ représentent les résultats de nos expériences que nous avons faites sous l'incidence $i = 45°$ en utilisant successivement des couches d'épaisseurs différentes de paraffine ou de stéarine. Les courbes en trait noir sur les figures 6 et 7 correspondent respectivement à ces tableaux. Nous avons rassemblé dans les tableaux II et II′ les résultats de calculs faits à partir des courbes précédentes donnant les déviations qu'on devrait avoir pour des absorbants de même épaisseur, tandis que les tableaux III et III′ représentent les déviations corrigées et les coefficients de réflexion ($r$) correspondants, calculés à partir de la formule (9). Les courbes en pointillés des figures 6 et 7 représentent les déviations corrigées et celles des figures 8 et 9 indiquent la représentation de $r = f(e)$, pour la paraffine et la stéarine respectivement. Nous avons répété les expériences avec la paraffine sous les incidences $i = 30°$, $45°$ et $60°$

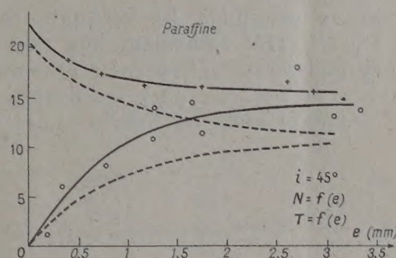



Fig. 6.

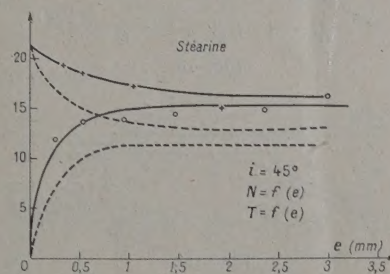



Fig. 7.

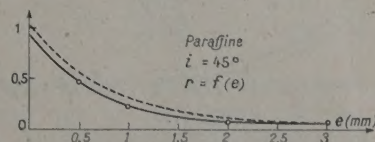



Fig. 8.

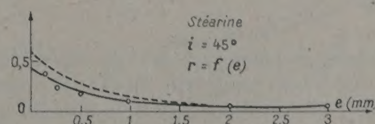



Fig. 9.

et nous avons calculé les mêmes quantités

$$\Delta_{30} = 0,40 + \frac{\alpha_T}{4}(0,6 + e),$$

$$\Delta_{45} = 0,45 + \frac{\alpha_T}{4}(0,6 + e),$$

$$\Delta_{60} = 0,59 + \frac{\alpha_T}{4}(0,6 + e)$$

et nous avons rassemblé les résultats dans les tableaux I″, II″, III″ équivalant aux tableaux I, II, III. Les figures 10, 10′ et 10″ représentent les fonctions $T = f(e)$ et $N = f(e)$, les figures 11, 11′ et 11″, $r = f(e)$ et enfin les figures 12, 12′ et 12″ donnent $r_e = f(i)$; dans ces figures, les courbes pleines et en pointillés ont toujours les mêmes significations.

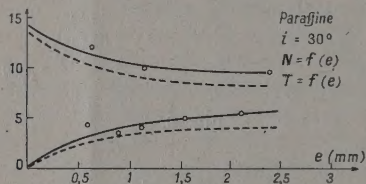



Fig. 10.

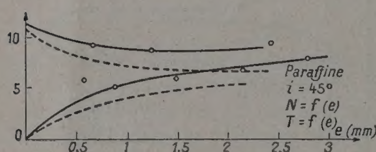



Fig. 10′.

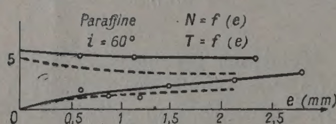



Fig. 10″.

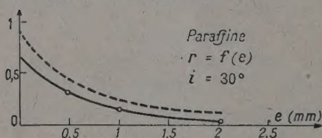



Fig. 11.

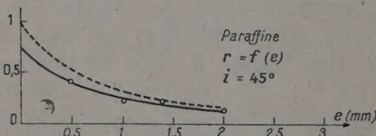



Fig. 11′.

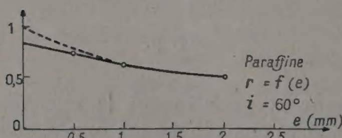



Fig. 11″.

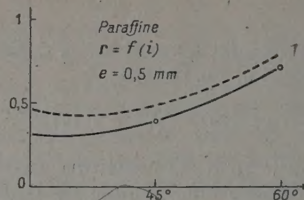



Fig. 12.

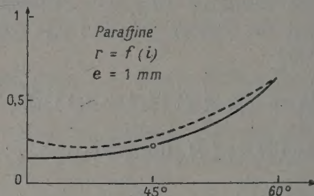



Fig. 12′.

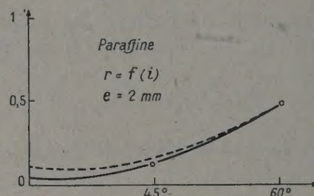



Fig. 12″.

TABLEAU I.

*Paraffine* (données expérimentales), $i = 45°$.

| $e$ (mm). | $\alpha_{T'}$. | $\alpha_{T'} - \alpha_{T_0} = \alpha_T$. | $e$ (mm). | $\alpha_{N'}$. |
|---|---|---|---|---|
| 0.... | 7,70 ± 0,19 | 0 | 0.... | 21,34 ± 0,20 |
| 0,20. | 8,96 ± 0,51 | 1,26 | 0,37. | 18,84 ± 0,06 |
| 0,32. | 13,80 ± 0,35 | 6,10 | 0,66. | 17,35 ± 0,09 |
| 0,75. | 15,70 ± 0,17 | 8,00 | 1,16. | 16,60 ± 0,16 |
| 1,18. | 21,00 ± 0,22 | 14,00 | 1,67. | 16,10 ± 0,16 |
| 1,23. | 16,00 ± 0,37 | 11,00 | 2,59. | 16,60 ± 0,06 |
| 2,08. | 22,68 ± 0,19 | 14,98 | 2,80. | 15,40 ± 0,01 |
| 2,26. | 18,32 ± 0,27 | 11,62 | | |
| 2,68. | 24,88 ± 0,19 | 17,18 | | |
| 3,02. | 21,10 ± 0,20 | 13,40 | | |
| 3,25. | 21,50 ± 0,29 | 13,80 | | |

TABLEAU II.

*Valeurs obtenues de la courbe de la figure* 6.

| $e$ (mm). | $\alpha_{N'}$. | $\alpha_T$. |
|---|---|---|
| 0.................... | 21,34 | 0 |
| 0,5.................. | 18,20 | 6,75 |
| 1.................... | 16,60 | 10,70 |
| 2.................... | 15,75 | 13,50 |
| 3.................... | 15,65 | 14,25 |

TABLEAU III.

*Valeurs corrigées,*

$$\Delta = 0,8 + \frac{\alpha_T}{4}(0,6 + e).$$

| $e$ (mm). | $\alpha_{N'} - \Delta$. | $3\frac{\alpha_T}{4}$. | $r$. | $r_0$. |
|---|---|---|---|---|
| 0 ......... | 20,54 | 0 | – | – |
| 0,5 ....... | 16,62 | 5,06 | 0,51 | 0,87 |
| 1 ......... | 14,03 | 8,02 | 0,27 | 0,84 |
| 2 ......... | 12,25 | 10,12 | 0,10 | 0,87 |
| 3 ......... | 11,65 | 10,96 | 0,04 | 0,84 |

TABLEAU I′.

*Stéarine* (données expérimentales) $i = 45°$.

| $e$ (mm). | $\alpha_{T'}$. | $\alpha_{T'} - \alpha_{T_0} = \alpha_T$. | $e$ (mm). | $\alpha_{N'}$. |
|---|---|---|---|---|
| 0 .... | 7,7 ± 0,19 | 0 | 0 .... | 21,34 ± 0,20 |
| 0,30. | 20,50 ± 0,07 | 12,80 | 0,32. | 19,60 ± 0,00 |
| 0,56. | 22,00 ± 0,17 | 14,30 | 0,53. | 18,50 ± 0,00 |
| 0,95. | 21,10 ± 0,47 | 13,40 | 1,02. | 17,50 ± 0,20 |
| 1,49. | 22,90 ± 0,15 | 14,20 | 1,94. | 15,50 ± 0,20 |
| 2,36. | 22,60 ± 0,32 | 14,90 | 3,04. | 16,50 ± 0,20 |
| 2,98. | 24,30 ± 1,00 | 16,60 | | |

TABLEAU II′.

*Valeurs obtenues de la courbe de la figure* 7.

| $e$ (mm). | $\alpha_{N'}$. | $\alpha_T$. |
|---|---|---|
| 0 ...................... | 21,34 | 0 |
| 0,5 .................... | 18,70 | 14,00 |
| 1 ...................... | 17,50 | 15,25 |
| 2 ...................... | 16,50 | 15,50 |
| 3 ...................... | 16,50 | 15,50 |

TABLEAU III′.

*Valeurs corrigées,*

$$\Delta = 0,8 + \frac{\alpha_T}{4}(0,6 + e).$$

| $e$ (mm). | $\alpha_{N'} - \Delta$. | $3\frac{\alpha_T}{4}$. | |
|---|---|---|---|
| 0 ................ | 20,54 | 0 | – |
| 0,5 .............. | 15,56 | 10,50 | 0,19 |
| 1 ................ | 13,00 | 11,44 | 0,07 |
| 2 ................ | 12,50 | 11,62 | 0,04 |
| 3 ................ | 12,60 | 11,62 | 0,04 |

TABLEAU I″.

*Paraffine* (données expérimentales).

| $e$ (mm). | $i = 30°$. $\alpha_{T'}$. | $i = 30°$. $\alpha_{T'} - \alpha_{T_0}$. | $i = 45°$. $\alpha_{T'}$. | $i = 45°$. $\alpha_{T'} - \alpha_{T_0}$. | $i = 60°$ $\alpha_{T'}$. | $i = 60°$ $\alpha_{T'} - \alpha_{T_0}$. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 ......... | 3,75 | 0 | 4,20 | 0 | 5,50 | 0 |
| 0,54 ...... | 8,10 | 4,35 | 9,85 | 5,65 | 7,40 | 1,90 |
| 0,84 ...... | 7,40 | 3,65 | 9,45 | 5,25 | 7,13 | 1,63 |
| 1,16 ...... | 8,00 | 4,25 | 8,50 | 4,30 | 6,90 | 1,40 |
| 1,49 ...... | 8,70 | 4,95 | 10,45 | 6,25 | 8,00 | 2,50 |
| 2,10 ...... | 12,45 | 8,70 | 11,20 | 7,00 | 8,50 | 3,00 |
| 2,67 ...... | – | – | 12,63 | 8,43 | 9,26 | 3,75 |

| $e$ (mm). | $i = 30°$ $\alpha_{N'}$. | $i = 45°$. $\alpha_{N'}$. | $i = 60°$. $\alpha_{N'}$. |
|---|---|---|---|
| 0 .......... | 13,60 | 11,70 | 5,50 |
| 0,62 ....... | 11,75 | 9,45 | 5,15 |
| 1,18 ....... | 10,00 | 9,06 | 5,30 |
| 2,44 ....... | 9,86 | 9,75 | 5,52 |

TABLEAU II″.

*Valeurs obtenues des courbes des figures* 10, 10′, 10″.

| $e$ (mm). | $\alpha_{N'}$ $i = 30°$. | $\alpha_{N'}$ $i = 45°$. | $\alpha_{N'}$ $i = 60°$. | $\alpha_{T'}$ $i = 30°$. | $\alpha_{T'}$ $i = 45°$. | $\alpha_{T'}$ $i = 60°$. | $r_{30°}$. | $r_{45°}$. | $r_{60°}$. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 ...................... | 13,60 | 11,70 | 5,50 | 0 | 0 | 0 | – | – | – |
| 0,5 .................... | 11,30 | 9,50 | 5,25 | 3,00 | 4,00 | 1,25 | 0,46 | 0,47 | 0,78 |
| 1 ...................... | 10,30 | 9,25 | 5,20 | 4,25 | 5,75 | 2,00 | 0,25 | 0,27 | 0,66 |
| 2 ...................... | 9,75 | 9,25 | 5,00 | 5,25 | 7,20 | 3,00 | 0,10 | 0,15 | 0,49 |

TABLEAU III‴.

*Valeurs corrigées.*

| $e$ (mm). | $\alpha_{N'} - \Delta$. $i = 30°$. | $\alpha_{N'} - \Delta$. $i = 45°$. | $\alpha_{N'} - \Delta$. $i = 60°$. | $3\frac{\alpha_T}{4}$. $i = 30°$. | $3\frac{\alpha_T}{4}$. $i = 45°$. | $3\frac{\alpha_T}{4}$. $i = 60°$. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 .... | 13,20 | 11,25 | 4,91 | 0 | 0 | 0 |
| 0,5 .. | 10,41 | 8,40 | 4,46 | 4,25 | 3,00 | 0,93 |
| 1 .... | 9,16 | 7,55 | 4,26 | 3,18 | 4,31 | 1,50 |
| 2 .... | 8,30 | 7,36 | 3,81 | 3,94 | 5,40 | 2,25 |

$$\Delta_{30} = 0,4 + \frac{\alpha_T}{4}(0,6 + e),$$

$$\Delta_{45} = 0,45 + \frac{\alpha_T}{4}(0,6 + e),$$

$$\Delta_{60} = 0,59 + \frac{\alpha_T}{4}(0,6 + e).$$

5. **Discussion.** — Ces résultats nous permettent d'affirmer que : *a.* la stéarine est plus absorbante que la paraffine; *b.* le coefficient d'absorption d'une surface dépend de l'angle d'incidence $i$ et croît avec lui.

Il m'est un devoir agréable de remercier M. le Professeur R. Lucas, directeur de l'École Supérieure de Physique et de Chimie, qui a bien voulu me recevoir dans son laboratoire et qui m'a proposé cette étude. Je remercie également M. J. Luc pour ses bons conseils.

Manuscrit remis le 10 mai 1955.

# OPTIQUE ÉLECTRONIQUE DES SYSTÈMES CYLINDRIQUES PRÉSENTANT UN PLAN DE SYMÉTRIE. II. LES ABERRATIONS

Par MICHEL LAUDET,
Faculté des Sciences de Toulouse.

**Sommaire.** — Nous avons dans un premier article [1] déterminé le trajet des particules dans le cas de l'approximation du premier ordre (champ électrique, champ magnétique, relativité, etc.).
Dans ce deuxième article nous donnons les formules concernant les diverses aberrations.
La méthode adoptée est celle proposée par E. Durand [2] dans l'étude des systèmes de révolution.

A. **Les aberrations chromatiques.** — Les équations (19) et (17) sont relatives à une valeur $\varepsilon$ de la tension d'accélération de la particule. Pour une valeur voisine $\varepsilon + \Delta\varepsilon$ de cette tension, ces équations deviennent respectivement

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\{(S+\Delta S)(y+\Delta y)'\} - (T+\Delta T)(y+\Delta y) = -(\pm) C\frac{\gamma B}{S+\Delta S}, \quad (46)$$

$$(z+\Delta z)' = \frac{C}{S+\Delta S} - (\pm)\frac{\gamma B}{S+\Delta S}(y+\Delta y). \quad (47)$$

En retranchant membre à membre (46) et (19) d'une part, (47) et (17) d'autre part, nous obtenons, en nous limitant aux termes du premier ordre

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\{S(\Delta y)'\} - T\Delta y = -\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\Delta S y') - \Delta T y \pm C\frac{\gamma B}{S^2}\Delta S\right\}.$$

$$(\Delta z)' = -\left\{\frac{C}{S^2}\Delta S \pm \gamma B \Delta\left(\frac{y}{S}\right)\right\}.$$

Posons

$$\Delta P = -\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\Delta S y') - \Delta T y \pm C\frac{\gamma B}{S^2}\Delta S\right\},$$

$$\Delta Q = -\left\{\frac{C}{S^2}\Delta S \pm \gamma B \Delta\left(\frac{y}{S}\right)\right\}.$$

Les équations (40) et (41) s'écrivent

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\{S(\Delta y)'\} - T\Delta y = \Delta P, \quad (48)$$

$$(\Delta z)' = \Delta Q. \quad (49)$$

Les conditions initiales relatives aux deux trajectoires $\varepsilon$ et $\varepsilon + \Delta\varepsilon$ étant les mêmes, nous avons

$$\left.\begin{array}{ll}(\Delta y)_0 = 0, & (\Delta y)'_0 = 0, \\ (\Delta z)_0 = 0, & (\Delta z)'_0 = 0.\end{array}\right\} \quad (50)$$

Soit $l(x)$ une solution de l'équation (16) qui ne s'annule pas pour $x$ compris entre $x_0$ et $x_i$. Par combinaison linéaire des équations (16) et (48), nous obtenons

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\{S[l(\Delta y)' - l'(\Delta y)]\} = l\,\Delta P,$$

soit en intégrant et en tenant compte de (50)

$$l(\Delta y)' - l'(\Delta y) = \frac{1}{S}\int_{x_0}^{x} l\,\Delta P\,\Delta\xi_1.$$

Cette équation peut s'écrire encore

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\frac{\Delta y}{l}\right\} = \frac{1}{S l^2}\int_{x_0}^{x} l\,\Delta P\,\mathrm{d}\xi_1,$$

d'où l'on déduit par une nouvelle intégration

$$\Delta y = l\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}\xi_2}{S l^2}\int_{x_0}^{\xi_2} l\,\Delta P\,\mathrm{d}\xi_1.$$

En portant cette valeur de $\Delta y$ dans $\Delta Q$ et en intégrant (49), nous obtenons

$$\Delta z = \int_{x_0}^{x}\Delta Q\,\mathrm{d}x,$$

$\Delta P$ et $\Delta Q$ étant des fonctions linéaires de $y_0$, $y_D$ et $z_D$, l'image d'un point est encore une droite. Signalons que, au point de vue qualitatif, ce résultat se déduit immédiatement des relations (23).

Considérons un point-objet $P_0$ de coordonnées (*fig.* 12 *a*)

$$x = x_0, \qquad y = y_0, \qquad z = 0$$

et un diaphragme d'équation (*fig.* 12 *b*).

$$x = x_D, \qquad y = y_D,$$

Pour une tension d'accélération $\varepsilon$, on obtient dans le plan de front $x_i$ conjugué du plan $x = x_0$ une droite $D_\varepsilon$ d'équation

$$z = \left(\frac{b_3}{a_3}\right)_\varepsilon y - \left(\frac{a_1 b_3 - b_1 a_3}{a_3}\right)_\varepsilon y_0.$$

Pour une valeur $\varepsilon + \Delta\varepsilon$ de la tension, nous avons

une droite d'équation (*fig.* 12 *c*)

$$z = \left(\frac{b_3}{a_3}\right)_{\varepsilon+\Delta\varepsilon} y - \left(\frac{a_1 b_3 - b_1 a_3}{a_3}\right)_{\varepsilon+\Delta\varepsilon} y_0 - \left(\frac{a_2 b_3 - b_2 a_3}{a_3}\right)_{\varepsilon+\Delta\varepsilon} y_D$$

faisant avec $D\varepsilon$ un angle $\Delta\theta$ défini par

$$\operatorname{tg}\Delta\theta = \frac{\left(\frac{b_3}{a_3}\right)_{\varepsilon+\Delta\varepsilon} - \left(\frac{b_3}{a_3}\right)_{\varepsilon}}{1 + \left(\frac{b_3}{a_3}\right)_{\varepsilon+\Delta\varepsilon}\left(\frac{b_3}{a_3}\right)_{\varepsilon}},$$

où

$$\operatorname{tg}\Delta\theta = \sigma_\theta\,\Delta\varepsilon,$$

avec

$$\sigma_\theta = \theta'_\varepsilon \quad \text{et} \quad \operatorname{tg}\theta = \left(\frac{b_3}{a_3}\right)_\varepsilon.$$

L'angle $\Delta\theta$ caractérise l'*aberration chromatique de rotation.* Il est indépendant de $y_0$ et $y_D$ et n'existe qu'en présence d'une induction magnétique.

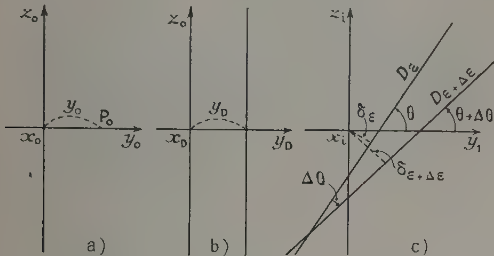



Fig. 12.

Désignons par $\delta$ et $\delta_{\varepsilon+\Delta\varepsilon}$ la distance de l'origine aux droites $D\varepsilon$ et $D_{\varepsilon+\Delta\varepsilon}$ (*fig.* 12 *c*). La différence

$$\delta = \delta_{\varepsilon+\Delta\varepsilon} - \delta_\varepsilon$$

caractérise l'*aberration chromatique de translation.*

Elle a pour expression

$$\delta = \left|\frac{(a_1 b_3 - b_1 a_3)y_0 + (a_2 b_3 - b_2 a_3)y_D}{\sqrt{a_3^2 + b_3^2}}\right|_{\varepsilon+\Delta\varepsilon} - \left|\frac{(a_1 b_3 - b_1 a_3)y_0}{\sqrt{a_3^2 + b_3^2}}\right|_{\varepsilon},$$

soit

$$\delta = \{\sigma_{\delta 0} y_0 + \sigma_{\delta D} y_D\}\,\Delta\varepsilon,$$

avec

$$\sigma_{\delta 0} = \left|\frac{a_1 b_3 - b_1 a_3}{\sqrt{a_3^2 + b_3^2}}\right|'_\varepsilon,$$

$$\sigma_{\delta D} = \left|\frac{a_2 b_3 - b_2 a_3}{\sqrt{a_3^2 + b_3^2}}\right|'_\varepsilon,$$

$\delta$ est nul pour

$$y_0 = y_D = 0.$$

On passe donc de $D\varepsilon$ à $D_{\varepsilon+\Delta\varepsilon}$ par le déplacement produit de la rotation $\theta$ et de la translation $\delta$ normale à $D_\varepsilon$.

Pour la même position du point-objet $P_0$ (*fig.* 13 *a*) considérons dans le même plan de front $x = x_D$, une fente diaphragme d'équation (*fig.* 13 *b*)

$$y_D - d < y < y_D + d.$$

Pour la tension $\varepsilon$, l'image de $P_0$ dans le plan $x_i$ conjugué de $x_0$ est la droite $D\varepsilon$. Pour la valeur $\varepsilon + \Delta\varepsilon$ de la tension, les plans $x_0$ et $x_i$ ne sont plus conjugués et la droite précédente devient une bande lumineuse (*fig.* 13 *c*) parallèle à la droite $D_{\varepsilon+\Delta\varepsilon}$ et de largeur

$$\Delta = 2d\left|\frac{a_3 b_2 - a_2 b_3}{\sqrt{a_3^2 + b_3^2}}\right|_{\varepsilon+\Delta\varepsilon}.$$

Soit, en tenant compte de $\sigma_{\delta D}$,

$$\Delta = 2d\sigma_{\delta D}\,\Delta\varepsilon.$$

$\Delta$ tend vers zéro avec l'ouverture $2d$ du diaphragme. Elle peut donc servir à caractériser l'*aberration chromatique d'ouverture.* On peut enfin définir une *aberration chromatique longitudinale* par la distance $\Delta x_i$ séparant les deux plans de front-image $x_i$ et $x_i + \Delta x_i$ conjugués d'un même plan de front-objet $x_0$ et correspondant aux deux valeurs $\varepsilon$ et $\varepsilon + \Delta\varepsilon$ de la tension d'accélération des particules.

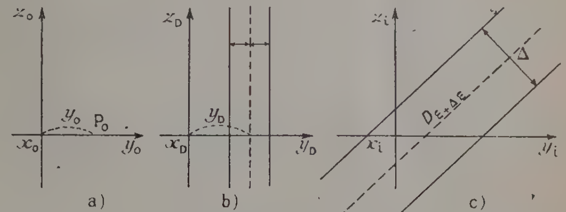



Fig. 13.

Les conditions de conjugaison entre les plans-images $x_i$ et $x_i + \Delta x_i$ et le plan-objet $x_0$ s'écrivent

$$(a_2 b_3 - b_2 a_3)_{\varepsilon, x_i} = 0,$$

$$(a_2 b_3 - b_2 a_3)_{\varepsilon+\Delta\varepsilon, x_i+\Delta x_i} = 0.$$

Nous en déduisons

$$\Delta x_i = -\frac{(a_2 b_3 - b_2 a_3)'_\varepsilon}{(a_2 b_3 - b_2 a_3)'_x}\,\Delta\varepsilon.$$

**B. Les aberrations du troisième ordre.** — 1. Les équations différentielles des trajectoires. — Il suffit de considérer les termes $F_2$ et $F_4$ dans l'expression du lagrangien $F$.

Les équations de la trajectoire s'écrivent alors

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F_2}{\partial y'}\right) - \left(\frac{\partial F_2}{\partial y}\right) = -\left\{\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F_4}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F_4}{\partial y}\right\}, \quad (51)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F_2}{\partial z'}\right) = -\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F_4}{\partial z'}\right). \quad (52)$$

Les seconds membres de ces équations contiennent les termes du troisième ordre en $y$, $y'$, $z'$. Nous pouvons donc, à la même approximation, remplacer $y$ et $z$ par les solutions relatives à l'approximation du premier ordre.

Désignons par $y + \Delta y$ et $z + \Delta z$ les solutions de (51) et (52) pour les distinguer des solutions $y$ et $z$ des équations (13) et (14). En retranchant membre à membre (15) de (51) et (16) de (52), nous obtenons

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\{S\,\Delta y'\} + 2M\,\Delta y - (\pm)\gamma B\,\Delta z' \\ &\qquad = -\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F_4}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F_4}{\partial y}\right\}, \\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\{S\,\Delta z' \pm \gamma B\,\Delta y\} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F_4}{\partial z'}\right). \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Cette dernière équation fournit l'intégrale première

$$S\,\Delta z' \pm \gamma B\,\Delta y = -\frac{\partial F_4}{\partial z'}. \tag{54}$$

En portant (54) dans (53) et en tenant compte de (18), on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\{S\,\Delta y'\} - T\,\Delta y \\ &\qquad = -(\pm)\frac{\gamma B}{S}\frac{\partial F_4}{\partial z'} - \left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F_4}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F_4}{\partial y}\right\}. \end{aligned} \tag{55}$$

Les seconds membres de (54) et (55) sont des fonctions connues de $x$ puisqu'on y a remplacé $y$ et $z$ par les solutions supposées connues de l'approximation du second ordre.

On aura $\Delta y$ en résolvant (55). On obtiendra ensuite $\Delta z$ en portant cette valeur de $\Delta y$ dans (54) et en intégrant.

Les conditions initiales étant les mêmes pour les trajectoires $(y, z)$ et $(y + \Delta y, z + \Delta z)$, nous avons

$$(\Delta y)_0 = 0, \qquad (\Delta y)'_0 = 0 \tag{56}$$

$$(\Delta z)_0 = 0, \qquad (\Delta z)'_0 = 0 \tag{57}$$

2. Intégration des équations des trajectoires. — Par combinaison linéaire des équations (20) et (55), nous obtenons

$$\begin{aligned} &l\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\{S\,\Delta y'\} - \Delta y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\{S l'\} \\ &\qquad = -\left\{(\pm)\frac{\gamma B}{S}\frac{\partial F_4}{\partial z'} - \frac{\partial F}{\partial y}\right\} l - l\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\frac{\partial F_4}{\partial y'}\right\} \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{S l^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\Delta y}{l}\right)\right\} \\ &\qquad = -l\left[(\pm)\frac{\gamma B}{S}\frac{\partial F_4}{\partial z'} - \frac{\partial F_4}{\partial y}\right] + l'\frac{\partial F_4}{\partial y'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{l\frac{\partial F_4}{\partial y'}\right\}. \end{aligned}$$

En intégrant du plan-objet $x = x_0$ au plan d'observation $x$, on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\frac{\Delta y}{l}\right\} \\ &\quad = \frac{1}{Sl^2}\left\{l_0\left(\frac{\partial F_4}{\mathrm{d}y'}\right)_0 - l\frac{\partial F_4}{\partial y'}\right\} \\ &\qquad - \frac{1}{Sl^2}\int_{x_0}^{x}\left\{l\left[(\pm)\frac{\gamma B}{S}\frac{\partial F_4}{\partial z'} - \frac{\partial F_4}{\partial y}\right] - l'\frac{\partial F_4}{\partial y'}\right\}\mathrm{d}\xi_1. \end{aligned}$$

Une nouvelle intégration donne, en tenant compte de (56),

$$\begin{aligned} \Delta y = {} & l\int_{x_0}^{x}\frac{1}{Sl^2}\left\{l_0\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_0 - l\frac{\partial F_4}{\mathrm{d}y'}\right\}\mathrm{d}\xi \\ & - l\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}\xi_2}{Sl^2}\int_{x_0}^{\xi_2}\left\{l\left[\pm\frac{\gamma B}{S}\frac{\partial F_4}{\partial z'} - \frac{\partial F_4}{\partial y}\right]\right. \\ & \left. \qquad\qquad - l'\frac{\partial F_4}{\partial y'}\right\}\mathrm{d}\xi_1 \end{aligned} \tag{58}$$

La relation (54) donne ensuite, compte tenu de (57),

$$\Delta z = -\int_{x_0}^{x}\left\{\pm\gamma B\,\Delta y + \frac{\partial F_4}{\partial z'}\right\}\frac{\mathrm{d}x}{S}. \tag{59}$$

3. Expression des coefficients d'aberration. — En dérivant la relation (10), nous obtenons les expressions des dérivées partielles de $F_4$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_4}{\partial y} &= 4Ny^3 - M(y'^2 + z'^2)y - (\pm)\frac{\gamma B''}{2}y^2 z', \\ \frac{\partial F_4}{\partial y'} &= -My^2 y' - \frac{S}{2}(y'^2 + z'^2)y', \\ \frac{\partial F_4}{\partial z'} &= -My^2 z' - \frac{S}{2}(y'^2 + z'^2)z' - (\pm)\frac{\gamma B''}{6}y^3. \end{aligned}$$

Soit, en tenant compte de (31),

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_4}{\partial y} = {} & A_1 y_0^3 + B_1 y_0^2 y_D + C_1 y_0^2 z_D \\ & + D_1 y_0 y_D^2 + 2E_1 y_0 y_D z_D + F_1 y_0 z_D^2 \\ & + G_1 y_D^3 + H_1 y_D^2 z_D + I_1 y_D z_D^2 + J_1 z_D^3, \end{aligned} \tag{60}$$

avec

$$\begin{aligned} A_1 &= 4Na_1^3 - M(a_1'^2 + b_1'^2)a_1 - (\pm)\frac{\gamma B''}{2}a_1^2 b_1', \\ B_1 &= 12Na_1^2 a_2 - M\{2a_1(a_1' a_2' + b_1' b_2') + (a_1'^2 + b_1'^2)a_2\} \\ &\qquad - (\pm)\frac{\gamma B''}{2}(2a_1 a_2 b_1' + a_1^2 b_2'), \\ C_1 &= 12Na_1^2 a_3 - M\{2a_1(a_1' a_3' + b_1' b_3') + (a_1'^2 + b_1'^2)a_3\} \\ &\qquad - (\pm)\frac{\gamma B''}{2}(2a_1 a_3 b_1' + a_1^2 b_3'), \\ D_1 &= 12Na_1 a_2^2 - M\{2a_2(a_1' a_2' + b_1' b_2') + (a_2'^2 + b_2'^2)a_1\} \\ &\qquad - (\pm)\frac{\gamma B''}{2}(2a_1 a_2 b_2' + a_2^2 b_1'), \\ E_1 &= 12Na_1 a_2 a_3 - M\{a_1(a_2' a_3' + b_2' b_3') + a_2(a_1' a_3' + b_1' b_3') \\ &\qquad + a_3(a_1' a_2' + b_1' b_2')\} \\ &\qquad - (\pm)\frac{\gamma B''}{2}(a_2 a_3 b_1' + a_1 a_3 b_2' + a_1 a_2 b_3'), \\ F_1 &= 12Na_1 a_3^2 - M\{2a_3(a_1' a_3' + b_1' b_3') + (a_3'^2 + b_3'^2)a_1\} \\ &\qquad - (\pm)\frac{\gamma B''}{2}(2a_1 a_3 b_3' + a_3^2 b_1'), \end{aligned}$$

$$G_1 = 4Na_2^3 - M(a_2'^2 + b_2'^2)a_2 - (\pm)\frac{\gamma B''}{2} a_2^2 b_2',$$

$$H_1 = 12Na_2^2 a_3 - M\{2a_2(a_2'a_3' + b_2'b_3') + (a_2'^2 + b_2'^2)a_3\} - (\pm)\frac{\gamma B''}{2}(2a_2a_3b_2' + a_2^2 b_3'),$$

$$I_1 = 12Na_2a_3^2 - M\{2a_3(a_2'a_3' + b_2'b_2') + (a_3'^2 + b_3'^2)a_2\} - (\pm)\frac{\gamma B''}{2}(2a_2a_3b_3' + a_3^2 b_2'),$$

$$J_1 = 4Na_3^3 - M(a_3'^2 + b_3'^2)a_3 - (\pm)\frac{\gamma B''}{2} a_3^2 b_3'.$$

On obtient, de même,

$$\frac{\partial F_4}{\partial y'} = Azy_0^3 + B_2y_0^2y_D + C_2y_0^2z_D + D_2y_0y_D^2 + 2E_2y_0y_Dz_D + F_2y_0z_D^2 + G_2y_D^3 + H_2y_D^2z_D + I_2y_Dz_D^2 + J_2z_D^3, \quad (61)$$

avec

$$A_2 = -Ma_1^2a_1' - \frac{S}{2}(a_1'^2 + b_1'^2)a_1',$$

$$B_2 = -M(2a_1a_2a_1' + a_1^2a_2') - \frac{S}{2}\{2a_1'(a_1'a_2' + b_1'b_2') + (a_1'^2 + b_1'^2)a_2'\},$$

$$C_2 = -M(2a_1a_3a_1' + a_1^2a_3') - \frac{S}{2}\{2a_1'(a_1'a_3' + b_1'b_3') + (a_1'^2 + b_1'^2)a_3'\},$$

$$D_2 = -M(2a_1a_2a_2' + a_2^2a_1') - \frac{S}{2}\{2a_2'(a_1'a_2' + b_1'b_2') + (a_2'^2 + b_2'^2)a_1'\},$$

$$E_2 = -M(a_2a_3a_1' + a_1a_3a_2' + a_1a_2a_3') - \frac{S}{2}\{a_1'(a_2'a_3' + b_2'b_3') + a_2'(a_1'a_3' + b_1'b_3') + a_3'(a_1'a_2' + b_1'b_2')\},$$

$$F_2 = -M(2a_1a_3a_3' + a_3^2a_1') - \frac{S}{2}\{2a_3'(a_1'a_3' + b_1'b_3') + (a_3'^2 + b_3'^2)a_1'\},$$

$$G_2 = -Ma_2^2a_2' - \frac{S}{2}(a_2'^2 + b_2'^2)a_2',$$

$$H_2 = -M(2a_2a_3a_2' + a_2^2a_3') - \frac{S}{2}\{2a_2'(a_2'a_3' + b_2'b_3') + (a_2'^2 + b_2'^2)a_3'\},$$

$$I_2 = -M(2a_2a_3a_3' + a_3^2a_2') - \frac{S}{2}\{2a_3'(a_2'a_3' + b_2'b_3') + (a_3'^2 + b_3'^2)a_2'\},$$

$$J_2 = -Ma_3^2a_3' - \frac{S}{2}(a_3'^2 + b_3'^2)a_3'.$$

On a enfin

$$\frac{\partial F_4}{\partial z'} = A_3y_0^3 + B_3y_0^2y_D + C_3y_0^2z_D + D_3y_0y_D^2 + 2E_3y_0y_Dz_D + F_3y_0z_D^2 + G_3y_D^3 + H_3y_D^2z_D + I_3y_Dz_D^2 + J_3z_D^3, \quad (62)$$

avec

$$A_3 = -Ma_1^2b_1' - \frac{S}{2}(a_1'^2 + b_1'^2)b_1' - (\pm)\frac{\gamma B''}{6}a_1^3,$$

$$B_3 = -M(2a_1a_2b_1' + a_1^2b_2') - \frac{S}{2}\{2b_1'(a_1'a_2' + b_1'b_2') + (a_1'^2 + b_1'^2)b_2'\} - (\pm)\frac{\gamma B''}{2}a_1^2a_2,$$

$$C_3 = -M(2a_1a_3b_1' + a_1^2b_3') - \frac{S}{2}\{2b_1'(a_1'a_2' + b_1'b_3') + (a_1'^2 + b_1'^2)b_3'\} - (\pm)\frac{\gamma B''}{2}a_1^2a_3,$$

$$D_3 = -M(2a_1a_2b_2' + a_2^2b_1') - \frac{S}{2}\{2b_2'(a_1'a_2' + b_1'b_2') + (a_2'^2 + b_2'^2)b_1'\} - (\pm)\frac{\gamma B''}{2}a_1a_2^2,$$

$$E_3 = -M(a_2a_3b_1' + a_1a_3b_2' + a_1a_2b_3') - \frac{S}{2}\{b_1'(a_2'a_3' + b_2'b_3') + b_2'(a_1'a_3' + b_1'b_3') + b_3'(a_1'a_2' + b_1'b_2')\} - (\pm)\frac{\gamma B''}{2}a_1a_2a_3,$$

$$F_3 = -M(2a_1a_3b_3' + a_3^2b_1') - \frac{S}{2}\{2b_3'(a_1'a_3' + b_1'b_3') + (a_3'^2 + b_3'^2)b_1'\} - (\pm)\frac{\gamma B''}{2}a_1^2a^2,$$

$$G_3 = -Ma_2^2b_2' - \frac{S}{2}(a_2'^2 + b_2'^2)b'^2 - (\pm)\frac{\gamma B''}{6}a_2^3,$$

$$H_3 = -M(2a_2a_3b_2' + a_2^2b_3') - \frac{S}{2}\{2b_2'(a_2'a_3' + b_2'b_3') + (a_2'^2 + b_2'^2)b_3'\} - (\pm)\frac{\gamma B''}{2}a_2^2a_3,$$

$$I_3 = -M(2a_2a_3b_3' + a_3^2b_2') - \frac{S}{2}\{2b_3'(a_2'a_3' + b_2'b_3') + (a_3'^2 + b_3'^2)b_2'\} - (\pm)\frac{\gamma B''}{2}a_2a_3^2,$$

$$J_3 = -Ma_3^2b_3' - \frac{S}{2}(a_3'^2 + b_3'^2)b_3' - (\pm)\frac{\gamma B''}{6}a_3^3.$$

En portant (60), (61) et (62) dans (58), on obtient

$$\Delta y = A_yy_0^3 + B_yy_0^2y_D + C_yy_0^2z_D + D_yy_0y_D^2 + 2E_yy_0y_Dz_D + F_yy_0z_D^2 + G_yy_D^3 + H_yy_D^2z_D + I_yy_Dz_D^2 + J_yz_D^3, \quad (63)$$

avec

$$K_y = l\int_{x_0}^{x}\frac{1}{Sl^2}\{(lK_2)_0 - lK_2\}\,d\xi - l\int_{x^0}^{x}\frac{d\xi_2}{Sl^2}\int_{x_0}^{\xi_2}\left\{l\left[\pm\frac{\gamma B}{S}K_3 - K_1\right] - l'K_2\right\}d\xi_1,$$

avec

$$K = A,\quad B,\quad \ldots,\quad J.$$

De (59), on tire, en tenant compte de (63),

$$\Delta z = A_zy_0^3 + B_zy_0^2y_D + C_zy_0^2z_D + D_zy_0y_D^2 + 2E_zy_0y_Dz_D + F_zy_0z_D^2 + G_zy_D^3 + H_zy_D^2z_D + I_zy_Dz_D^2 + J_zz_D^3, \quad (64)$$

avec

$$K_z = -\int_{x_0}^{x}\{\pm\gamma BK_y + K_3\}\frac{dx}{S}, \qquad K = A,\ B,\ \ldots,\ J.$$

4. Classification des aberrations. — Nous déterminerons les aberrations correspondant aux différents termes de $\Delta y$ et $\Delta z$ en considérant les rayons émis par un point-objet ($y_0$, O) et venant percer le plan du diaphragme le long d'une droite d'équation $y = y_D$.

1° *Aberration sphérique.* — Elle est exprimée par les termes indépendants de $y_0$

$$\Delta y = G_y y_D^3 + H_y y_D^2 z_D + I_y y_D z_D^2 + J_y z_D^3,$$
$$\Delta z = G_z y_D^3 + H_z y_D^2 z_D + I_z y_D z_D^2 + J_z z_D^3.$$

Ce sont les seuls qui subsistent quand le point-objet est dans le plan de symétrie du système.

2° *La coma.* — Elle correspond à l'ensemble des termes proportionnels à $y_0$

$$\Delta y = y_0 \{ D_y y_D^2 + 2 E_y y_D z_D + F_y z_D^2 \},$$
$$\Delta z = y_0 \{ D_z y_D^2 + 2 E_z y_D z_D + F_z z_D^2 \}.$$

3° *L'astigmatisme et la courbure de champ.* — Elle est relative aux termes proportionnels à $y_0^2$

$$\Delta y = y_0^2 \{ B_y y_D + C_y z_D \},$$
$$\Delta z = y_0^2 \{ B_z z_D + C_z z_D \}.$$

Elle devient prépondérante pour des points éloignés du plan de symétrie.

4° *La distorsion.* — Elle est caractérisée par les termes

$$\Delta y = A_y y_0^3,$$
$$\Delta z = A_z y_0^3.$$

Elle existerait même si la droite était dans le plan de symétrie de la lentille.

5. Étude de quelques courbes d'aberration. — Soient $y$ et $z$ les coordonnées du point P où un rayon couperait le plan d'observation si les conditions de l'approximation du second ordre étaient satisfaites.

En réalité, les coordonnées du point d'intersection sont

$$y_1 = y + \Delta y, \qquad z_1 = z + \Delta z.$$

Nous nous proposons d'étudier le lieu des points $P_1(y_1, z_1)$ correspondant aux rayons issus d'un point lumineux $P_0(y_0, O)$ et s'appuyant sur une fente d'équation $y = y_D$.

Nous savons que le lieu du point P ($y$, $z$) est une droite ($\delta$) d'équation

$$(\delta) \begin{cases} y = y_0 a_1 + y_D a_2 + z_D a_3, \\ z = y_0 b_1 + y_D a_2 + z_D b_3. \end{cases}$$

Pour étudier plus commodément les déformations de cette courbe lorsqu'on s'écarte des conditions de l'approximation du premier ordre, nous prendrons pour axe Z'Z la droite ($\delta$) elle-même, et pour axe Y'Y l'axe issu de O et normal à ($\delta$) (*fig.* 14).

Ce changement d'axe est défini par

$$\operatorname{tg} \theta_1 = -\frac{a_3}{b_3} \tag{65}$$

et

$$\eta = y_0 \frac{a_1 b_3 - b_1 a_3}{\sqrt{a_3^2 + b_3^2}} + y_D \frac{a_2 b_3 - b_2 a_3}{\sqrt{a_3^2 + b_3^2}},$$
$$\zeta = y_0 \frac{a_1 a_3 + b_1 b_3}{\sqrt{a_3^2 + b_3^2}} + y_D \frac{a_2 a_3 + b_2 b_3}{\sqrt{a_3^2 + b_3^2}}.$$

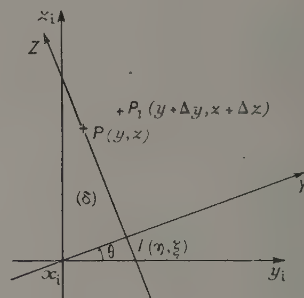


Fig. 14.

Dans ce nouveau système, la droite ($\delta$) a pour équation

$$Y = 0, \qquad Z = z_D \sqrt{a_3^2 + b_3^2}$$

et les coordonnées du point $P_1(y + \Delta y, z + \Delta z)$ deviennent

$$Y_1 = \Delta y \cos\theta_1 + \Delta z \sin\theta_1,$$
$$Z_1 = z_D \sqrt{a_3^2 + b_3^2} - \Delta y \sin\theta_1 + \Delta z \cos\theta_1.$$

Soit, en tenant compte de (65)

$$\left.\begin{aligned} Y_1 &= \frac{1}{\sqrt{a_3^2 + b_3^2}} \{ b_3 \Delta y - a_3 \Delta z \}, \\ Z_1 &= \frac{1}{\sqrt{a_3^2 + b_3^2}} \{ z_D (a_3^2 + b_3^2) + a_3 \Delta y + b_3 \Delta z \}. \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

Nous étudierons tout d'abord le cas où le point-objet est dans le plan de symétrie du système ($y_0 = 0$) et nous suivrons les déformations de la courbe lorsqu'on déplace la fente du diaphragme parallèlement à elle-même et normalement au plan de symétrie. Ce sont les aberrations relatives à l'ouverture du faisceau.

Nous supposerons ensuite que la fente du diaphragme est dans le plan de symétrie ($y_D = 0$) et nous déplacerons l'objet normalement à ce plan. Ce sont les aberrations dues aux dimensions de l'objet.

1° *Aberrations dues à l'ouverture du faisceau.* — En faisant $y_0 = 0$ dans les équations (63) et (64),

nous obtenons

$$\left.\begin{aligned}\Delta y &= G_y y_D^3 + H_y y_D^2 z_D + I_y y_D z_D^2 + J_y z_D^3,\\ \Delta z &= G_z y_D^3 + H_z y_D^2 z_D + I_z y_D z_D^2 + J_z z_D^3,\end{aligned}\right\} \quad (67)$$

Soit, en portant dans (66),

$$Y_1 = \frac{1}{\sqrt{a_3^2 + b_3^2}} \{ (b_3 G_y - a_3 G_z) y_D^3 + (b_3 H_y - a_3 H_z) y_D^2 z_D + (b_3 I_y - a_3 I_z) y_D z_D^2 + (b_3 J_y - a_3 J_z) z_D^3 \},$$

$$Z_1 = \frac{1}{\sqrt{a_3^2 + b_3^2}} \{ z_D (a_3^2 + b_3^2) + (a_3 G_y + b_3 G_z) y_D^3 + (a_3 H_y + b_3 H_z) y_D^2 z_D + (a_3 I_y + b_3 I_z) y_D z_D^2 + (a_3 J_y + b_3 J_3) z_D^3 \}$$

ou encore, avec des notations différentes,

$$\left.\begin{aligned}Y_1 &= \alpha_0 y_D^3 + \alpha_1 y_D^2 z_D + \alpha_2 y_D z_D^2 + \alpha_3 z_D^3\\ Z_1 &= \lambda^2 z_D + \beta_0 y_D^3 + \beta_1 y_D^2 z_D + \beta_2 y_D z_D^2 + \beta_3 z_D^3.\end{aligned}\right\} \quad (68)$$

Faisons le changement d'axe défini par

$$\left.\begin{aligned}Y_2 &= \ \ (Y_1 - \alpha_0 y_D^3) \cos\theta_2 + (Z_1 - \beta_0 y_D^3) \sin\theta_2,\\ Z_2 &= -(Y_1 - \alpha_0 y_D^3) \sin\theta_2 + (Z_1 - \beta_0 x_D^3) \cos\theta_2,\end{aligned}\right\} \quad (69)$$

avec

$$\operatorname{tg}\theta_2 = \frac{\alpha_1 y_D^2}{\lambda^2 + \beta_1 y_D^2}$$

et posons

$$\gamma_2 = \alpha_2 \cos\theta_2 + \beta_2 \sin\theta_2, \qquad \gamma_3 = \alpha_3 \cos\theta_2 + \beta_3 \sin\theta_2,$$
$$\mu = -\alpha_1 y_D^2 \sin\theta_2 + (\lambda^2 + \beta_1 y_D^2) \cos\theta_2,$$
$$\delta_2 = -\alpha_2 \sin\theta_2 + \beta_2 \cos\theta_2, \qquad \delta_3 = -\alpha_3 \sin\theta_2 + \beta_3 \cos\theta_2.$$

Les équations (69) s'écrivent

$$\left.\begin{aligned}Y_2 &= \gamma_2 y_D z_D^2 + \gamma_3 z_D^3,\\ Z_2 &= \mu z_D + \delta_2 y_D z_D^2 + \delta_3 z_D^3.\end{aligned}\right\} \quad (70)$$

Les courbes représentatives sont tangentes à l'origine à l'axe $Z'_2 Z_2$. Elles ont, en ce point, une courbure $\frac{1}{\rho}$ dont le développement en fonction de $y_D$ limité au terme du troisième ordre a pour expression

$$\frac{1}{\rho} = 2\frac{\alpha_2}{\lambda^4} y_D - 2\frac{\alpha_1 \beta_2 + 2\alpha_2 \beta_1}{\lambda^6} y_D^3. \quad (71)$$

*a. Le diaphragme est dans le plan de symétrie de la lentille.* — Dans le cas où le diaphragme est dans le plan de symétrie de la lentille, c'est-à-dire pour $y_D = 0$, les équations (68) et (71) se réduisent à

$$\left.\begin{aligned}Y_1 &= \alpha_3 z_D^3\\ Z_1 &= \lambda^2 z_D + \beta_3 z_D^3\end{aligned}\right\} \quad \frac{1}{\rho} = 0$$

et la courbe représentative a l'allure indiquée sur la figure 15. Lorsque $z_D$ est suffisamment petit pour que l'on puisse négliger les termes en $z_D^3$, c'est-à-dire dans le cas de l'approximation du premier ordre, nous retrouvons la droite ($\delta$) d'équation

$$Y_1 = 0, \qquad Z_1 = \lambda^2 z_D.$$

*b. Le diaphragme est situé près du plan de symétrie de la lentille.* — Dans le cas où le diaphragme est situé très près du plan de symétrie de la lentille, nous pouvons négliger les termes en $y_D^2$ et $y_D^3$. Les équations (68) s'écrivent alors

$$Y_1 = \alpha_2 y_D z_D^2 + \alpha_3 z_D^3,$$
$$Z_1 = \lambda^2 z_D + \beta_2 y_D z_D^2 + \beta_3 z_D^3$$

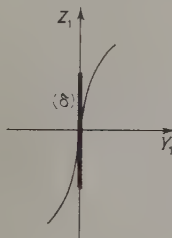


Fig. 15.

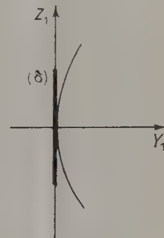


Fig. 16.

et la courbe représentative (*fig.* 16) au voisinage de l'origine est un arc dont la courbure a pour expression

$$\frac{1}{\rho} = 2\frac{\alpha_2}{\lambda_4} y_D.$$

*c. Le diaphragme n'est plus au voisinage immédiat du plan de symétrie de la lentille.* — Si le diaphragme n'est plus situé au voisinage immédiat du plan de symétrie de la lentille, il faut tenir compte des termes en $y^2$ et $y^3$.

Nous avons alors un arc de courbe (*fig.* 17) dont la courbure est donnée par (71), mais n'admettant plus pour tangente la droite ($\delta$).

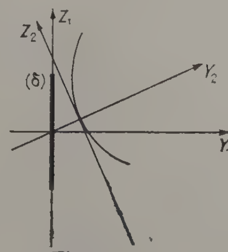


Fig. 17.

2° *Aberrations dues aux dimensions de l'objet.* — En faisant $y_D = 0$ dans les équations (63) et (64), nous obtenons

$$\Delta y = A_y y_0^3 + C_y y_0^2 z_D + F_y y_0 z_D^2 + J_y z_D^3,$$
$$\Delta z = A_z y_0^3 + C_z y_0^2 z_D + F_z y_0 z_D^2 + J_z z_D^3.$$

Ce sont des équations analogues aux relations (67). On aura donc des phénomènes semblables en déplaçant le point-objet ou la fente diaphragme.

## III. CAS PARTICULIER D'UN SYSTÈME ÉLECTROSTATIQUE PUR.

**1. L'approximation du premier ordre.** — 1° ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DES TRAJECTOIRES GAUSSIENNES. — Dans le cas particulier des systèmes électrostatiques purs, les termes $F_0$, $F_2$ et $F_4$ du lagrangien se réduisent à

$$F_0 = S;$$

$$F_2 = -My^2 + \frac{S}{2}(y'^2 + z'^2),$$

$$F_4 = \quad Ny^4 - \frac{M}{2}y^2(y'^2 + z'^2) - \frac{S}{8}(y'^2 + z'^2)^2$$

et les équations différentielles des trajectoires gaussiennes se simplifient et s'écrivent

$$z' = \frac{C}{S}, \tag{72}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(Sy') + 2My = 0. \tag{73}$$

2° CORRESPONDANCE « OBJET-IMAGE ». — L'équation (72) s'intègre immédiatement et donne

$$z = z_D \frac{\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}x}{S}}{\displaystyle\int_{x_0}^{x_D} \frac{\mathrm{d}x}{S}} = z_D\, b(x). \tag{74}$$

Soient $h(x)$ et $k(x)$ deux solutions particulières de (73) satisfaisant aux conditions aux limites

$$h(x_0) = 0, \qquad k(x_0) = 1.$$
$$h(x_D) = 1, \qquad k(x_D) = 0.$$

L'intégrale de (73) pour laquelle on a

$$y(x_0) = y_0 \qquad \text{et} \qquad y(x_D) = y_D$$

s'écrit

$$y = y_0\, k(x) + y_D\, h(x) \tag{75}$$

et la condition de conjugaison entre le plan « objet » $x = x_0$ et le plan « image » $x = x_i$ se réduit à

$$h(x_i) = 0.$$

Dans le plan $x_i$ conjugué du plan $x_0$ (*fig.* 18), la droite « image » a donc pour équation

$$y = y_0\, k(x_i).$$

3° PLAN FOCAL IMAGE. — Les conditions initiales relatives à la trajectoire d'une particule issue d'un point de coordonnées $x_0$, $y_0$, $z_0$ et dont la vitesse initiale est normale au plan de front $x_0$ s'écrivent

$$\left.\begin{array}{l} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = 0; \end{array}\right\} \tag{76}$$

$$\left.\begin{array}{l} z(x_0) = z_0, \\ z'(x_0) = 0. \end{array}\right\} \tag{77}$$

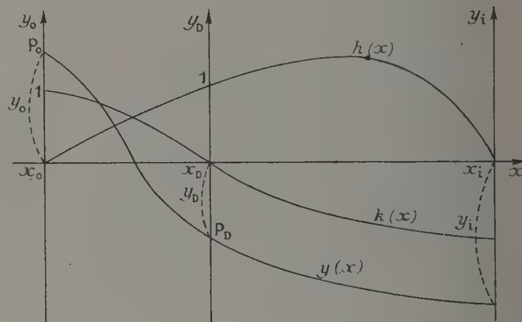



Fig. 18.

L'équation (72) donne, compte tenu de (77),

$$z = z_0.$$

Soit $k_1(x)$ une solution particulière de (73) satisfaisant à

$$k_1(x_0) = 1, \qquad k'_1(x_0) = 0.$$

L'intégrale de (73) vérifiant (76) s'écrit (*fig.* 19)

$$y = y_0\, k_1(x).$$

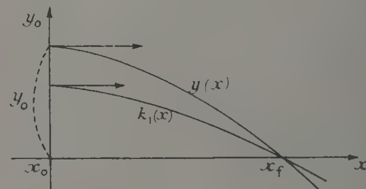



Fig. 19.

Si le plan $x_0$ est supposé situé dans une région où le champ est négligeable, le « plan focal image » sera défini par

$$k_1(x_f) = 0$$

et la « droite focale image » aura pour équation $y = 0$.

**2. Les aberrations chromatiques.** — Quelle que soit la tension d'accélération $\varepsilon$ des électrons,

les droites « images » demeurent parallèles au plan de symétrie du système. Il n'y a pas d'aberration chromatique de rotation

$$\sigma_\theta = 0.$$

L'aberration chromatique de translation $\delta$ se réduit à (*fig.* 20)

$$\delta = \{ k'_\varepsilon y_0 + k'_\varepsilon y_D \} \Delta\varepsilon,$$

d'où

$$\sigma_{\delta_0} = k'_\varepsilon, \qquad \sigma_{\delta_D} = h'_\varepsilon.$$

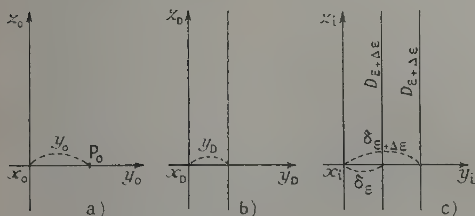


Fig. 20.

On en déduit l'expression de l'aberration chromatique d'ouverture

$$\Delta = 2 d h'_\varepsilon \Delta\varepsilon.$$

Enfin, l'aberration chromatique longitudinale a pour expression

$$\Delta x_i = -\frac{h'_\varepsilon}{h'_y} \Delta\varepsilon.$$

**3. Les aberrations du troisième ordre.** — 1° Équation différentielle des aberrations. — Les équations différentielles relatives aux aberrations du troisième ordre se simplifient notablement. Elles s'écrivent, en effet,

$$\frac{d}{dx}\{ S \Delta y' \} + 2 M \Delta y = -\left\{ \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F_4}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F_4}{\partial y} \right\}, \quad (78)$$

$$\frac{d}{dx}\{ S \Delta z' \} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{dF_4}{dz'}\right). \quad (79)$$

L'intégration de (79) donne

$$(\Delta z)_i = -\int_{x_0}^{x_i} \frac{1}{S} \frac{\partial F_4}{\partial z'} dx. \quad (80)$$

Par combinaison linéaire de (78) et de

$$\frac{d}{dx}\{ S h' \} + 2 M h = 0,$$

nous obtenons

$$\frac{d}{dx}\{ S[h \Delta y' - h' \Delta y] \} = -h \left\{ \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F_4}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F_4}{\partial y} \right\}.$$

En intégrant du plan « objet » $x = x_0$ pour lequel nous avons

$$h(x_0) = 0, \qquad (\Delta y)_0 = 0, \qquad (\Delta y)'_0 = 0$$

au plan image défini par

$$h(x_i) = 0,$$

nous obtenons

$$\{ S[h \Delta y' - h' \Delta y] \}_{x=x_0}^{x=x_i} = \int_{x_0}^{x_i} \left\{ \frac{d}{dx}\left(h \frac{\partial F_4}{\partial y'}\right) - \left(h \frac{\partial F_4}{\partial y} + h' \frac{\partial F_4}{\partial y'}\right) \right\} dx,$$

soit

$$(\Delta y)_i = \frac{1}{S_i h'_i} \int_{x_0}^{x_i} \left[ h \frac{\partial F_4}{\partial y} + h' \frac{\partial F_4}{\partial y'} \right] dx. \quad (81)$$

2° Expression des coefficients d'aberration. — En tenant compte des expressions (74) et (75) de $z$ et de $y$, nous trouvons successivement

$$\frac{\partial F_4}{\partial y} = A_1 y_0^3 + B_1 y_0^2 y_D + D_1 y_0 y_D^2 + F_1 y_0 z_D^2 + G_1 y_D^3 + I_1 y_D z_D^2, \quad (82)$$

avec

$$\begin{aligned} A_1 &= 4 N k^3 - M k k'^2, \\ B_1 &= 12 N h k^2 - M k' (2 k h' + h k'), \\ D_1 &= 12 N k h^2 - M h' (2 h k' + k h'), \\ F_1 &= -M k b'^2, \\ G_1 &= 4 N h^3 - M h h'^2, \\ I_1 &= -M h b'^2; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial y'} = A_2 y_0^3 + B_2 y_0^2 y_D + D_2 y_0 y_D^2 + F_2 y_0 z_D^2 + G_2 y_D^3 + I_2 y_D z_D^2, \quad (83)$$

avec

$$\begin{aligned} A_2 &= -M k^2 k' - \frac{S}{2} k'^3, \\ B_2 &= -M h (2 k h' + k h') - \frac{3}{2} S k'^2 h', \\ D_2 &= -M h (2 k h' + h k') - \frac{3}{2} S k' h'^2, \\ F_2 &= -\frac{S}{2} k' b'^2, \\ G_2 &= -M h^2 h' - \frac{S}{2} h'^3, \\ I_2 &= -\frac{S}{2} h' b'^2; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial z'} = C_3 y_0^2 z_D + 2 E_3 y_0 y_D z_D + H_3 y_D^2 z_D + J_3 z_D^2, \quad (84)$$

avec

$$\begin{aligned} C_3 &= -M k^2 b' - \frac{S}{2} k'^2 b', \\ E_3 &= -M h k b' - \frac{S}{2} h' k' b', \\ H_3 &= -M h^2 b' - \frac{S}{2} h'^2 b', \\ J_3 &= -\frac{S}{2} b'^3. \end{aligned}$$

En portant (82) et (83) dans (81), et (84) dans (80), nous obtenons

$$(\Delta y)_i = A_y y_0^3 + B_y y_0^2 y_D + D_y y_0 y_D^2 + F_y y_0 z_D^2 + G_y y_D^3 + I_y y_D z_D^2, \qquad (85)$$

$$(\Delta z)_i = C_z y_0^2 z_D + 2 E_z y_0 y_D z_D + H_z y_D^2 z_D + J_z z_0^3 \qquad (86)$$

en posant

$$\left.\begin{aligned} K_y &= \frac{1}{S_i h'_i} \int_{x_0}^{x_i} [h K_1 + h' K_2]\, \mathrm{d}x, \\ &\text{avec} \quad K = A, B, D, F, G, I, \\ K_z &= - \int_{x_0}^{x_i} \frac{K_3}{S}\, \mathrm{d}x, \qquad \text{avec} \quad K = C, E, H, J. \end{aligned}\right\} \qquad (87)$$

3° Courbes d'aberrations. — Une étude analogue à celle faite dans le cas général nous conduit en définitive à distinguer les aberrations dues à l'ouverture du faisceau et celles dues aux dimensions de l'objet.

*a. Aberrations dues à l'ouverture du faisceau.* — Elles correspondent au cas où le point-objet est dans le plan de symétrie ($y_0 = 0$). Les relations (85) et (86) se réduisent à

$$(\Delta y)_i = G_y y_D^3 + I_y y_D z_D^2;$$

$$(\Delta z)_i = H_z y_D^2 z_D + J_z z_D^3,$$

Les rayons s'appuyant sur la fente diaphragme d'équation $y_D$ coupent le plan-image $x_i$ suivant une courbe d'équation (*fig.* 21).

$$y_i = G_y y_D^3 + I_y y_D z_D^2.$$

$$z_i = b_i z_D + H_z y_D^2 z_D + J_z z_D^3$$

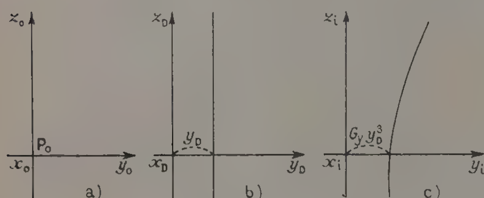



Fig. 21.

dont la courbure pour $z_D = 0$ a pour expression, en supposant que le diaphragme est voisin du plan de symétrie

$$\frac{1}{\rho} = 2 \frac{I_y}{b_i^2} y_D.$$

Soit, en tenant compte de (87),

$$\frac{1}{\rho} = \frac{-2 y_D}{b_i^2 S_i h'_i} \int_{x_0}^{x_i} b'^2 \left( M h^2 + \frac{S}{2} h'^2 \right) \mathrm{d}x.$$

*b. Aberrations dues aux dimensions de l'objet.* — Elles correspondent au cas où le diaphragme est dans le plan de symétrie ($y_D = 0$). On a, dans ces conditions,

$$(\Delta y)_i = A_y y_0^3 + F_y y_0 z_D^2,$$

$$(\Delta z)_i = C_z y_0^2 z_D + J_z z_D^3.$$

On obtient alors, dans le plan-image, une courbe d'équation (*fig.* 22)

$$y_i = b_i y_0 + A_y y_0^3 + F_y y_0 z_D^2.$$

$$z_i = b_i z_D + C_z y_0^2 z_D + J_z z_D^3$$

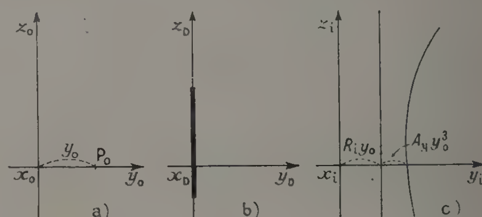



Fig. 22.

dont la courbure pour $z_D = 0$ a pour valeur, dans le cas où le point-objet est voisin du plan de symétrie

$$\frac{1}{\rho} = 2 \frac{F_y}{b_i^2} y_0,$$

soit, en tenant compte de (87),

$$\frac{1}{\rho} = \frac{-2 y_0}{b_i^2 S_i h'_i} \int_{x_0}^{x_i} b'^2 \left( M k h + \frac{S}{2} k' h' \right) \mathrm{d}x.$$

Manuscrit reçu le 26 avril 1955.

BIBLIOGRAPHIE.


[1] Laudet M. — *J. Physique Rad.*, 1955, **16**, 118.

[2] Durand E. — Une présentation simple de la théorie générale des systèmes de révolution en Optique électronique (Relativité et aberrations comprises), *Rev. Opt.*, 1954, **33**, 617.

# LA DIFFUSION DES PROTONS PAR LE GAZ RÉSIDUEL DANS UN SYNCHROTRON. I. DIFFUSION ÉLASTIQUE

Par JOSEPH SEIDEN,
Laboratoire d'Électronique et de Radioélectricité,
avenue du Général-Leclerc, Fontenay-aux-Roses.

**Sommaire.** — Les protons accélérés dans un synchrotron subissent tout au long de leur parcours dans la chambre à vide de nombreuses collisions contre des molécules de gaz résiduel. Une telle diffusion peut entraîner des pertes très importantes de protons. La diffusion élastique multiple engendre des oscillations dont l'amplitude est évaluée sur la base de la loi de Molière. Cette amplitude est proportionnelle à la racine carrée de la pression du gaz dans la chambre à vide et inversement proportionnelle aux racines carrées de l'énergie d'injection et du gain d'énergie par révolution. La théorie est appliquée à divers synchrotrons en construction. Appliquée au projet de synchrotron à forte convergence du M. I. T., elle montre que les amplitudes engendrées par diffusion multiple sont en moyenne supérieures à la demi-ouverture verticale de la chambre à vide. Les pertes de protons par diffusion élastique simple sont calculées; elles sont proportionnelles à la pression du gaz et inversement proportionnelles à l'énergie d'injection et au gain d'énergie par révolution; 6 pour 100 de protons sont perdus par diffusion simple dans le cosmotron de Brookhaven en fonctionnement; 14 pour 100 de protons seraient perdus par diffusion simple dans le synchrotron en projet du M. I. T.

Les protons accélérés dans un cosmotron effectuent dans la chambre à vide des parcours de l'ordre de $ct$ cm, $t$ représentant la durée d'un cycle accélérateur. Pour $t \approx 1$ s, valeur habituelle, on trouve donc un parcours de $ct = 3.10^{10}$ cm. Comme l'ont fait remarquer Blachman et Courant [1], un tel parcours, même effectué sous une pression de $10^{-6}$ mm Hg, équivaudrait à une distance de 40 cm couverte dans l'air à la pression atmosphérique. On voit donc que les pertes de protons dues à la diffusion ne doivent nullement être négligeables. Nous nous proposons ici d'évaluer ces pertes en fonction des dimensions intérieures de la chambre à vide, de la pression dans la chambre, ainsi que de l'énergie d'injection des protons.

Deux mécanismes distincts concourent à la perte de particules accélérées par diffusion. En effet, lors d'un choc d'un proton contre une molécule de gaz résiduel :

I. Le proton est écarté de sa trajectoire; il en résulte des oscillations bétatroniques, dangereuses lorsque leur amplitude devient de l'ordre des dimensions intérieures de la chambre à vide;

II. Le proton perd de l'énergie; il en résulte des oscillations synchrotroniques, dangereuses dans des conditions semblables [2].

Ainsi, c'est l'amplitude de ces oscillations qu'il importe essentiellement de calculer. L'élaboration d'une théorie satisfaisante de la diffusion est une tâche complexe. En effet, l'amplitude des oscillations dues à la diffusion ne dépend pas seulement des diverses collisions subies par la particule, mais aussi de toute « l'histoire » de la particule dans la chambre à vide : par exemple, une particule qu'une perturbation quelconque aurait amené à effectuer des oscillations de grande amplitude possèdera une probabilité élevée d'être rapidement perdue. Nous avons dû renoncer à tenir compte de toutes ces perturbations, et supposons donc qu'entre deux chocs, la particule parcourt une orbite non perturbée. Cependant, les effets des perturbations permanentes (ne dépendant pas du temps) peuvent être inclus « phénoménologiquement » en jouant sur les valeurs de l'amplitude $a$ des oscillations qui ne sont pas dues à la diffusion. Une autre cause de difficulté de la théorie réside dans le fait que les pertes de protons par diffusion ne sont pas engendrées uniquement par la diffusion multiple : nous verrons que de nombreux protons sont perdus par diffusion « plurale » (plural scattering) dépendant étroitement des amplitudes totales d'oscillation.

Nous développerons dans ce premier article la théorie du mécanisme I (diffusion multiple et diffusion plurale) pour un cosmotron à forte convergence (dont le cosmotron « classique », c'est-à-dire à gradient $n$ constant, n'est qu'un cas particulier). Ce cosmotron comprendra $N$ périodes magnétiques focalisantes identiques entre elles. Nous traiterons les oscillations verticales, la théorie serait identique pour les oscillations radiales.

**1. Amplitude des oscillations bétatroniques dues à la diffusion** [3]. — Supposons qu'une collision intervienne au point $\sigma$ de la trajectoire du proton, où celui-ci arrive avec les coordonnées $Z$, $Z'$,

$X$, $X'$. $Z$ est l'élongation de la particule relativement au plan médian $Z = 0$; $X$ est l'élongation des oscillations radiales, comptée à partir de l'orbite centrale $r = r_0$; les dérivées $Z'$ et $X'$ sont prises par rapport à l'arc $\sigma$ de cette orbite centrale. Le proton, après la collision, aura les coordonnées $Z$, $Z' + \omega_Z$, $X$, $X' + \omega_X$. Ici, $\omega_Z$ et $\omega_X$ représentent les projections de la déviation angulaire $\omega'$ engendrée par le choc sur les plans $\vec{\theta}\vec{O}\vec{Z}$ et $\vec{\theta}\vec{O}\vec{X}$ ($\vec{\theta}\vec{O}\vec{Z}$ est le plan vertical tangent à l'orbite centrale, $\vec{\theta}\vec{O}\vec{X}$ est le plan de cette orbite). Une telle approximation est valable à condition que les angles $\omega_Z$ et $\omega_X$ soient suffisamment petits pour pouvoir être assimilés à leur tangente; nous verrons au paragraphe 4 que cette condition est toujours réalisée.

Si, après avoir subi la collision au point $\sigma$, notre proton ne subissait plus aucune collision, l'élongation maximum qu'il atteindrait serait donnée par [4]

$$Z^2_{\max} = \frac{1}{\sin^2\varphi} s_{12}(\sigma_m)[U_X(\sigma, X, X' + \omega_X) + U_Z(\sigma, Z, Z' + \omega_Z)], \quad (1)$$

avec

$$\left.\begin{aligned} &U_X(\sigma, X, X') \\ &\quad = s^X_{12}(\sigma) X'^2 + [s^X_{11}(\sigma) - s^X_{22}(\sigma)] X' X - s^X_{21}(\sigma) X^2, \\ &U_Z(\sigma, Z, Z') \\ &\quad = s^Z_{12}(\sigma) Z'^2 + [s^Z_{11}(\sigma) - s^Z_{22}(\sigma)] Z' Z - s^Z_{21}(\sigma) Z^2. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$s^X_{ij}(\sigma)$ désigne la matrice qui permet de passer de $X(\sigma)$ et $X'(\sigma)$ à $X(\sigma + \sigma_p)$ et $X'(\sigma + \sigma_p)$, $\sigma_p$ étant la longueur d'une période du cosmotron comptée sur l'arc de l'orbite centrale; de même $s^Z_{ij}(\sigma)$ désigne la matrice qui permet de passer de $Z(\sigma)$ et $Z'(\sigma)$ à $Z(\sigma + \sigma_p)$ et $Z'(\sigma + \sigma_p)$. La formule (1) s'applique à condition que les structures des périodes radiales et verticales du cosmotron soient suffisamment voisines, c'est-à-dire à condition que le point de fonctionnement du cosmotron ait été placé au voisinage de l'axe de la région de stabilité. $\varphi$ est le déphasage dans une période, défini par

$$2\cos\varphi = \text{trace de } s^Z_{ij}(\sigma) \approx \text{trace de } s^X_{ij}(\sigma).$$

Enfin, $\sigma_m$ est le point où $|s^Z_{12}(\sigma)|$ est maximum,

$$|s_{12}(\sigma_m)| = \max |s^Z_{12}(\sigma)| = \max |s^X_{12}(\sigma)|.$$

L'apparition des élongations radiales $X$ dans (1) s'explique par le fait que les oscillations verticales et radiales sont couplées; lorsque le point de fonctionnement du cosmotron est au voisinage de l'axe de la région de stabilité [ou plus généralement au voisinage d'une ligne $N(\varphi_X - \varphi_Z) = 2k\pi$, $N$, nombre de périodes du cosmotron], ce couplage influe fortement sur les amplitudes des oscillations bétatroniques [4].

On voit sur l'équation (1) que le choc subi au point $\sigma$ a eu pour effet de modifier l'amplitude des oscillations effectuées par le proton; pour mettre ce fait en évidence, nous écrirons

$$Z^2_{\max} = \frac{1}{\sin^2\varphi} s_{12}(\sigma_m)[U_X(\sigma, X, X') + U_Z(\sigma, Z, Z')] + \frac{1}{\sin^2\varphi} s_{12}(\sigma_m)[\delta U_X + \delta U_Z], \quad (3)$$

avec

$$\left.\begin{aligned} &\delta U_X(\sigma, X, X', \omega_X) \\ &\quad = s^X_{12}(\sigma)\omega^2_X + [2 s^X_{12}(\sigma) X' \\ &\qquad + (s^X_{11}(\sigma) - s^X_{22}(\sigma)) X]\omega_X, \\ &\delta U_Z(\sigma, Z, Z', \omega_Z) \\ &\quad = s^Z_{12}(\sigma)\omega^2_Z + [2 s^Z_{12}(\sigma) Z' \\ &\qquad + (s^Z_{11}(\sigma) - s^Z_{22}(\sigma)) Z]\omega_Z. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Pour abréger, nous désignerons les amplitudes initiales des protons par $a$. Après avoir subi $m$ chocs, ces protons oscilleront avec une amplitude $Z_{\max}$ donnée par

$$Z^2_{\max} = a^2 + \frac{1}{\sin^2\varphi} s_{12}(\sigma_m) \sum_{i=1}^{m} [\delta U_X(i) + \delta U_Z(i)], \quad (5)$$

$\delta U_X(i)$ et $\delta U_Z(i)$ étant les quantités obtenues en remplaçant dans (4) $\sigma$, $X'$, $X$, $Z'$, $Z$, $\omega_X$, $\omega_Z$ par les quantités $\sigma_i$, $X'_i$, $X_i$, $Z'_i$, $Z_i$, $\omega_{X_i}$, $\omega_{Z_i}$ qui définissent le $i^{\text{ième}}$ choc.

Il nous faut évaluer la quantité $\langle Z^2_{\max}\rangle$. La valeur moyenne doit être prise sur les variables angulaires $\omega_{X_i}$ et $\omega_{Z_i}$ relatives aux divers chocs, et sur les variables d'espace $\sigma_i$, ..., $Z_i$ qui caractérisent les emplacements des chocs. Notons que la valeur moyenne des angles $\omega_{X_i}$ et $\omega_{Z_i}$ sera nulle, quelle que soit la loi de diffusion que l'on adoptera, à la seule condition que les probabilités d'avoir $\omega_{X_i}$ (ou $\omega_{Z_i}$) $= k$ ou $\omega_{X_i}$ (ou $\omega_{Z_i}$) $= -k$ soient égales. Les angles $\omega_X$ et $\omega_Z$ étant toujours très petits, on aura la relation

$$\omega^2_X + \omega^2_Z = \omega'^2; \quad (6)$$

$\omega'$ est la déviation angulaire engendrée par le choc, c'est-à-dire l'angle de la direction du proton diffusé avec celle du proton incident. En vertu du fait que le point de fonctionnement du cosmotron a été choisi au voisinage de l'axe de la région de stabilité, on aura

$$\langle s^X_{12}(\sigma)\rangle = \langle s^Z_{12}(\sigma)\rangle = \langle s_{12}(\sigma)\rangle, \quad (7)$$

avec

$$\langle s_{12}(\sigma)\rangle = \frac{1}{\sigma_p}\int_0^{\sigma_p} s_{12}(\sigma)\,d\sigma.$$

Faisant usage des relations (4), (6) et (7), il vient

$$\langle \delta U_X(i) + \delta U_Z(i)\rangle = \langle s_{12}(\sigma)\rangle\langle\omega'^2(i)\rangle.$$

Il est aisé de généraliser tout ce qui précède au

cas où le point de fonctionnement n'aurait pas été choisi au voisinage de l'axe de la région de stabilité.

Supposons que la chambre à vide contienne $M_1$ centres diffuseurs par centimètre cube de section totale de choc $S_1(T)$, $M_2$ centres diffuseurs par centimètre cube de section totale de choc $S_2(T)$, etc. $T$ désigne l'énergie cinétique des protons qui subissent le choc. Le nombre de chocs subis par un proton donné lorsque celui-ci effectue une révolution (c'est-à-dire un parcours égal à $l = N\sigma_p$) est égal à $M_1 S_1 l$ (contre des centres diffuseurs 1), à $M_2 S_2 l$ (contre des centres diffuseurs 2), etc. Dans (5), nous pouvons grouper ensemble les termes relatifs à chaque révolution, et il vient ainsi pour le carré moyen des amplitudes atteintes au bout de $k$ révolutions

$$\langle Z^2_{\max}(k)\rangle = a^2 + \frac{1}{\sin^2\varphi} s_{12}(\sigma_m)\langle s_{12}(\sigma)\rangle l \sum_q \sum_{h=1}^{h=k} M_q S_q(T_h)\langle \omega'^2_q(T_h)\rangle, \quad (8)$$

$T_h$ est l'énergie cinétique atteinte par le proton au bout de $h$ révolutions. L'indice $q$ numérote les différentes catégories 1, 2, ... de centres diffuseurs présents dans la chambre à vide. Pendant que le proton effectue une révolution, son énergie cinétique $T_h$ ne varie pratiquement pas (¹); il en résulte que les fonctions $S_q(T_h)$ et $\langle \omega'^2_q(T_h)\rangle$ varient adiabatiquement au cours de l'accélération; on peut par conséquent remplacer la somme portant sur $h$, qui figure dans (8), par une intégrale. Finalement, le carré moyen des amplitudes atteintes au bout de $k$ révolutions est donné par

$$\langle Z^2_{\max}(k)\rangle = a^2 + \frac{l}{\sin^2\varphi} s_{12}(\sigma_m)\langle s_{12}(\sigma)\rangle \sum_q M_q \times \int_{T_0}^{T_k} \frac{S_q(T)\langle \omega'^2_q(T)\rangle \, dT}{T_r(T)}, \quad (9)$$

$T_0$ désigne l'énergie d'injection, $T_k$ est l'énergie cinétique atteinte au bout de $k$ révolutions. $T_r(T)$ est le gain d'énergie par révolution, qui peut dépendre de $T$.

On voit sur (9) que $\langle Z^2_{\max}(K)\rangle$ est une fonction croissante du nombre $K$ de révolutions effectuées : le carré moyen de l'amplitude des oscillations dues à la diffusion, soit $\langle Z^2_{\max}(k)\rangle - a^2$, augmente depuis la valeur zéro à l'injection jusqu'à la valeur obtenue en faisant dans (9) $T_k = \infty$ [l'intégrale figurant dans (9) étant rapidement convergente comme il apparaîtra plus loin].

La formule (9) est générale, elle s'applique quelle que soit la nature des particules accélérées (protons, électrons, etc.). La formule (9) peut être appliquée à un cosmotron « classique » [c'est-à-dire un cosmotron pour lequel $n(\sigma) = -\frac{r_0}{H}\frac{dH}{dr} = n < 1$] en prenant quelques précautions. En effet, dans un cosmotron classique, le point de fonctionnement est en général choisi de façon à ce que le couplage entre oscillations radiales et verticales n'influe pas trop sensiblement sur leurs amplitudes; dans (1), nous n'aurons à considérer que $U_Z$, $U_X$ n'intervenant pas. On voit aisément que ce fait entraîne que dans (9), il apparaît $\frac{l}{2\sin^2\varphi}$ au lieu de $\frac{l}{\sin^2\varphi}$. Ainsi, pour un cosmotron classique qui ne comporterait pas de sections rectilignes, on trouve

$$\langle Z^2_{\max}(k)\rangle = a^2 + \frac{l}{2}\frac{r_0^2}{n}\sum_q M_q \times \int_{T_0}^{T_k} \frac{S_q(T)\langle \omega'^2(T)\rangle}{T_r(T)} dT, \quad (9\,bis)$$

avec $l = 2\pi r_0$, puisque

$$\frac{s_{12}(\sigma_m)\langle s_{12}(\sigma)\rangle}{\sin^2\varphi} = \frac{r_0^2}{n}.$$

2. **Le choix de la loi de diffusion.** — Pour achever le calcul du carré moyen de l'amplitude des oscillations bétatroniques dues à la diffusion, il faut choisir maintenant une loi de diffusion, sur la base de laquelle il sera possible d'expliciter les fonctions $S(T)$ et $\langle [\omega'(T)]^2\rangle$ dans (9). Pour des protons, dont l'énergie cinétique est supérieure à 3,5 MeV, les sections de choc relatives aux collisions inélastiques sont notablement inférieures à celles qui interviennent dans les chocs élastiques, de sorte qu'il suffira de considérer la diffusion élastique (²). On notera que cette conclusion n'est pas nécessairement correcte pour des électrons.

*a. Approximation de Born.* — Les résultats s'exprimeront simplement en fonction de $T_0$ et $T_r$ si l'on adopte les lois de diffusion découlant de l'emploi de l'approximation de Born. La section différentielle de choc (diffusion d'un proton par un atome neutre) est alors donnée par la formule de Rutherford-Mott [5], [6]

$$dS(\omega') = \frac{\pi e^4}{2m^2v^4}(Y-F)^2 \frac{\sin\omega'\, d\omega'}{\sin^4\frac{\omega'}{2}}, \quad (10)$$

$Y$ est le nombre atomique des atomes diffuseurs, $F$ est un facteur qui tient compte de l'effet d'écran des électrons des atomes diffuseurs, $m$ et $v$ sont la masse et la vitesse des protons diffusés; $\omega'$ est l'angle de la direction du proton diffusé avec celle du proton incident (« angle de diffusion »), c'est la

(¹) $\frac{T_r}{T_k} \ll 1$.

(²) Cette proposition est due à : BLACHMAN et COURANT. *Phys. Rev.*, 1948, **74**, 140.

projection de cet angle sur le plan $\theta\vec{O}\vec{Z}$ que nous avons désignée par $\omega_Z$.

La présence de $F$ entraîne que

$$dS(\omega') \approx 0 \quad \text{pour} \quad \omega' < \omega'_{min},$$

avec

$$\omega'_{min} \approx \frac{\lambda\!\!\!^{-}}{b} = \frac{\hbar}{mvb},$$

où $b = a_0 Y^{-\frac{1}{3}}$ est le « rayon » de l'atome diffuseur ($a_0 = 5{,}29.10^{-9}$ cm est le rayon de la première orbite de Bohr relative à l'hydrogène). A cause des dimensions finies du noyau, les angles $\omega'$ de diffusion seront tous inférieurs à

$$\omega'_{max} \approx \frac{\lambda\!\!\!^{-}}{1{,}4.10^{-13} A^{\frac{1}{3}}},$$

$A$ étant la masse atomique des atomes diffuseurs [6]. On trouve ainsi pour la section totale de choc

$$S = \int_{\omega'_{min}}^{\omega'_{max}} dS(\omega') = \frac{4\pi Y^2 e^4}{m^2 v^4 \omega'^2_{min}},$$

formule valable à condition que les angles de diffusion soient suffisamment petits (en tenant compte de ce que $\omega'_{max} \gg \omega'_{min}$).

Pour des raisons qui seront exposées au paragraphe 4, on ne doit pas prendre [7]

$$\langle \omega'^2 \rangle = \frac{\int_{\omega'_{min}}^{\omega'_{max}} \omega'^2 \, dS(\omega')}{\int dS(\omega')} = 2\omega'^2_{min} \log \frac{\omega'_{max}}{\omega'_{min}}, \quad (11')$$

mais

$$\langle \omega'^2 \rangle = \frac{\int_{\omega'_{min}}^{\omega'_0} \omega'^2 \, dS(\omega')}{\int dS(\omega')} = 2\omega'^2_{min} \log \frac{\omega'_0}{\omega'_{min}}, \quad (11)$$

$\omega'_0$ étant défini par (20). On en tire

$$\begin{aligned} S(T)\langle[\omega'(T)]^2\rangle &= \frac{8\pi Y^2 e^4}{m^2 v^4} \log \frac{\omega'_0}{\omega'_{min}} \\ &= 2\pi Y^2 e^4 \log\left[\frac{\omega'_0}{\hbar}\sqrt{2m}\, b\sqrt{T}\right]\frac{1}{T^2} \quad (11\ bis) \end{aligned}$$

à l'approximation non relativiste où $T = \frac{1}{2}mv^2$; d'où l'expression du carré moyen

$$\langle Z^2 \rangle = \langle Z^2_{max} \rangle - a^2$$

des amplitudes des oscillations bétatroniques dues à la diffusion, à la fin de l'accélération ($T_k \approx \infty$)

$$\langle Z^2 \rangle = \frac{2N\sigma_p s_{12}(\sigma_m)\langle s_{12}(\sigma)\rangle}{\sin^2\varphi} \frac{\pi e^4}{T_r T_0} \sum_q M_q Y_q^2 \times \left[\log\left(\frac{\omega'_0}{\hbar}\sqrt{2m}\, b_q \sqrt{T_0}\right) + \frac{1}{2}\right], \quad (12)$$

l'indice $q$, rappelons-le, numérotant les différentes catégories de centres diffuseurs présents. Nous avons supposé que $T_r$ était constant durant la fraction de cycle accélérateur qui contribue notablement à la diffusion, il serait facile de généraliser (12) au cas où cette condition n'est pas remplie.

TABLEAU I.

| $T_0$ (MeV). | $\beta$. | $\gamma = \frac{Y}{137\beta}$. | $\lambda\!\!\!^{-}(T_0)$ (cm). | $\omega'_{max}(T_0)$ (°). |
|---|---|---|---|---|
| 5....... | 0,102 | 0,5 | $2{,}1.10^{-13}$ | 35,4 |
| 20....... | 0,205 | 0,25 | $10^{-13}$ | 17,1 |
| 50....... | 0,314 | 0,16 | $0{,}61\ 10^{-13}$ | 10,4 |

*b.* Il est bien connu que l'approximation de Born qui a servi à déduire (12), n'est valable qu'à la condition que

$$\gamma = \frac{Ye^2}{\hbar v} = \frac{Y}{137\beta}$$

soit assez petit devant l'unité $\left(\beta = \frac{v}{c}\right)$. Le tableau I ci-contre permet de se rendre compte de la légitimité de notre approximation (12) en fonction de l'énergie d'injection $T_0$ utilisée. $\gamma$ et $\omega'_{max}$ y ont été calculés pour l'azote; les valeurs de $\gamma$ et $\omega'_{max}$ relatives à l'oxygène sont très voisines, puisque l'oxygène suit immédiatement l'azote dans la classification périodique des éléments. On voit donc qu'en ce qui concerne l'air (azote + oxygène !), la formule (12) constitue une bonne approximation pour des énergies d'injection supérieures à 20 MeV. Cette formule s'applique dans les mêmes conditions à la diffusion par les molécules d'huile qui proviennent des pompes à diffusion d'huile servant à faire le vide dans la chambre (le carbone précède l'azote dans la classification périodique !). Mais pour des énergies d'injection $T_0$ inférieures à 20 MeV, ou bien lorsqu'on utilise des pompes à diffusion de mercure (pour lequel $Y = 80$), l'approximation de Born devient insuffisante. On pourra alors utiliser la théorie de la diffusion de Molière pour calculer $S(T)$ et $\langle[\omega'(T)]^2\rangle$ qui figurent dans (9). Il vient ainsi

$$S(T)\langle[\omega'(T)]^2\rangle = \pi Y^2 e^4 \left[\log \frac{\omega'^2_0}{\chi^2_\gamma} - 1\right]\frac{1}{T^2},$$

avec

$$\chi_\gamma = 1{,}2\,\omega'_{min}(1 + 3{,}33\gamma^2)^{\frac{1}{2}};$$

d'où, par application du théorème de la moyenne, le carré moyen de l'amplitude des oscillations dues à la diffusion

$$\langle Z^2 \rangle = \frac{N\sigma_p s_{12}(\sigma_m)\langle s_{12}(\sigma)\rangle}{\sin^2\varphi} \times \frac{\pi e^4}{T_r T_0} \sum_q M_q Y_q^2 \left[\log \frac{\omega'^2_0}{\chi^2_{\gamma q}(T_a)} - 1\right], \quad (13)$$

où $T_a$ est une énergie comprise entre $T_0$ et l'énergie finale des protons (Courant [7] a proposé de prendre

$T_a = 2T_0$; notons que $T_a$ n'entre dans (13) que par un logarithme, fonction très lentement variable de $T_a$).

Les expressions (12) et (13) montrent toutes les deux que $\langle Z^2 \rangle$ varie comme $\frac{1}{T_r}$ et $\frac{1}{T_0}$, respectivement inverses du gain d'énergie par révolution et de l'énergie cinétique d'injection, d'où l'intérêt qu'il y a d'accroître ces énergies. Par les facteurs $M_q$, $\langle Z^2 \rangle$ est proportionnel aux pressions partielles des différents gaz simples contenus dans la chambre à vide. Les longueurs d'onde de de Broglie $\bar{\lambda}(T_0)$ des protons à l'injection (portées au tableau I) sont notablement inférieures aux distances des deux atomes d'oxygène ou des deux atomes d'azote dans les molécules $O_2$ ou $N_2$; il en résulte que chaque molécule de $O_2$ ou $N_2$ doit être considérée comme comportant deux centres diffuseurs indépendants. Plus généralement, toute molécule présente dans la chambre à vide possède autant de centres diffuseurs indépendants que d'atomes constituants.

Le facteur $\frac{N \sigma_p s_{12}(\sigma_m) \langle s_{12}(\sigma) \rangle}{\sin^2 \varphi}$ ne dépend que des paramètres géométriques du cosmotron. $N\sigma_p = l$ est la longueur de l'orbite centrale. Nous avons calculé explicitement la fonction $\frac{s_{12}(\sigma_m) \langle s_{12}(\sigma) \rangle}{\sin^2 \varphi}$ pour des cosmotrons dépourvus de sections rectilignes, dont les $N$ périodes se composent chacune de deux lentilles d'égale longueur $\frac{l}{2N}$ et à « gradients » $\pm n$ opposés $\left(n = \left| -\frac{r_0}{H} \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}r} \right| = \text{valeur absolue du « gradient » du champ magnétique } H \text{ qui assure la focalisation}\right)$. Cette fonction est alors de la forme

$$\frac{s_{12}(\sigma_m) \langle s_{12}(\sigma) \rangle}{\sin^2 \varphi} = R\left(\frac{\sqrt{n}}{N}\right) \frac{r_0^2}{n}.$$

TABLEAU II.

| $\frac{\sqrt{n}}{N}$. | $\varphi$ = déphasage dans une période. | $R\left(\frac{\sqrt{n}}{N}\right)$. |
|---|---|---|
| 0,5 .................... | $\frac{\pi}{2}$ | 13,6 |
| 0,33 .................... | $\frac{\pi}{5}$ | 15,6 |

Des valeurs de $R\left(\frac{\sqrt{n}}{N}\right)$ sont données dans le tableau II ([3]). On peut dire avec une bonne approximation que dans tous les cas, le carré moyen des amplitudes dues à la diffusion, soit $\langle Z^2 \rangle$ varie comme $r_0^3$ cube du rayon de l'orbite centrale.

([3]) Le désaccord entre les valeurs de $R$ du tableau II et celles qui figurent dans notre travail [3] provient de ce qu'ici, nous calculons des amplitudes maxima alors que dans [3], nous n'avions évalué que des amplitudes moyennes. De plus, le couplage entre oscillations radiales et verticales a été négligé dans [3].

**3. Corrections diverses. Valeurs numériques des amplitudes d'oscillations dues à la diffusion.** — *a. Effet de l'amortissement des oscillations.* — On peut essayer de tenir compte de l'amortissement des oscillations bétatroniques au cours d'un cycle accélérateur. A l'approximation non relativiste, leur amplitude varie comme $T^{-\frac{1}{4}}$. L'argumentation donnée par Blachman et Courant [1] pour le cosmotron classique est applicable au cosmotron à forte convergence. Raisonnant, par exemple, sur l'approximation de Born, on aura à remplacer dans l'intégration qui permet de passer de (11 *bis*) à (12)

$$\int J \frac{\mathrm{d}T}{T^2} \qquad \text{par} \qquad \int_{T_0}^{T_k} J \frac{\mathrm{d}T}{T^2} \left(\frac{T}{T_k}\right)^{\frac{1}{2}},$$

où $J(T)$ est une fonction très lentement variable de $T(J(T) \sim \log c\sqrt{T})$. La dernière intégrale est donc maximum pour $T_k \approx 4\,T_0$ : on en déduit que les oscillations dues à la diffusion atteignent leur amplitude maximum lorsque l'énergie cinétique $T_k$ des protons est devenue égale à quatre fois l'énergie cinétique d'injection $T_0$. D'autre part, le carré moyen maximum $\langle Z^2 \rangle_{\max}$ ainsi trouvé est égal à la moitié des carrés moyens obtenus en (12) ou en (13) sans tenir compte de l'amortissement. Toutefois, Blachman a pu montrer récemment que la valeur $\langle Z^2 \rangle_{\max} = \frac{1}{2} \langle Z^2 \rangle$ n'était acceptable qu'au cas où les pertes de protons étaient très faibles, et que cette valeur de $\langle Z^2 \rangle_{\max}$ constituait une sous-estimation dans tous les autres cas.

*b. Corrections relativistes* [8]. — Ni la théorie de Molière, ni l'approximation de Born sous la forme (10) ne sont relativistes ([4]). Il importe, lorsqu'on injecte à haute énergie, d'évaluer l'importance des corrections relativistes. Mott, utilisant la théorie de Dirac, a montré que la section différentielle de choc est donnée à l'approximation relativiste de Born par [5], [6]

$$\mathrm{d}S(\omega') = \frac{2\pi e^4}{4 m^2 v^4} Y^2 \frac{\sin \omega' \, \mathrm{d}\omega'}{\sin^4 \frac{\omega'}{2}} \times \left[1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\omega'}{2} + \frac{Y\pi\beta}{137}\left(\sin \frac{\omega'}{2} - 1\right)\right], \quad (14)$$

avec $\beta = \frac{v}{c}$, où $m$ désigne la masse relativiste $\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ du proton accéléré. Pour de hautes énergies d'injection ($T_0 \approx 50$ MeV) les angles $\omega'$ de diffusion seront petits de sorte que dans la loi de Mott (14), nous ne retiendrons que l'unité parmi les termes

([4]) La théorie de Molière néglige l'influence du spin dans les processus de diffusion. Une telle approximation n'est strictement valable que pour des angles de diffusion très petits.

qui figurent dans le crochet. Ici, la relation $T = \frac{1}{2} mv^2$ cesse d'être valable, nous aurons

$$T = mc^2 - m_0 c^2,$$

d'où

$$mv^2 = m_0 c^2 \frac{y^2 + 2y}{y + 1} \qquad \left( y = \frac{T}{m_0 c^2} \right).$$

On trouve alors

$$S(T) \langle [\omega'(T)]^2 \rangle = \frac{8\pi Y^2 e^4 (y+1)^2}{m_0^2 c^4 (y^2 + 2y)^2} \log \frac{\omega'_0}{\omega'_{\min}(T)},$$

d'où en appliquant (9) (avec $T_k = \infty$) le carré moyen des oscillations dues à la diffusion à l'approximation relativiste à la fin de l'accélération :

$$\langle Z^2 \rangle_R \approx \frac{2N\sigma_p s_{12}(\sigma_m) \langle s_{12}(\sigma) \rangle}{\sin^2 \varphi} \sum_q \frac{M_q \pi Y_q^2 e^4}{T_r m_0 c^2} \times \left[ \frac{1}{\frac{T_0}{m_0 c^2}} + \frac{1}{\frac{T_0}{m_0 c^2} + 2} + \log \frac{\frac{T_0}{m_0 c^2} + 2}{\frac{T_0}{m_0 c^2}} \right] \log \frac{\omega'_0}{\omega'_{\min}(T_0)}. \quad (15)$$

Le rapport entre le carré moyen relativiste $\langle Z^2 \rangle_R$ et le carré moyen non relativiste $\langle Z^2 \rangle$ fourni par (12) est égal à

$$\frac{\langle Z^2 \rangle_R}{\langle Z^2 \rangle} \approx \left[ \frac{1}{\frac{T_0}{m_0 c^2}} + \frac{1}{\frac{T_0}{m_0 c^2} + 2} + \log \frac{\frac{T_0}{m_0 c^2} + 2}{\frac{T_0}{m_0 c^2}} \right] \frac{T_0}{m_0 c^2}.$$

Faisons le calcul pour une énergie d'injection de

$$T_0 = 50 \text{ MeV} = 80.10^{-6} \text{ ergs.}$$

Pour un proton, l'énergie au repos est

$$m_0 c^2 = 938 \text{ MeV} = 15,05.10^{-4} \text{ ergs.}$$

D'où

$$\langle Z^2 \rangle_R | \langle Z^2 \rangle = 1,21.$$

On voit donc que la correction relativiste consiste à majorer légèrement la valeur (12) non relativiste. Le fait que la correction est relativement faible découle de ce que ce sont les chocs dans le domaine « non relativiste » (c'est-à-dire les chocs qui interviennent juste après l'injection) qui fournissent la contribution la plus importante à l'amplitude finale des oscillations.

*c. Valeurs numériques des amplitudes d'oscillations dues à la diffusion.* — Toutes les considérations développées jusqu'ici permettent d'avoir une idée des pressions qui doivent régner dans la chambre à vide lorsqu'on se fixe les valeurs maxima du carré moyen des amplitudes d'oscillations dues à la diffusion. Les résultats sont consignés au tableau III.

TABLEAU III.

| | | |
|---|---|---|
| $r_0$ (m) | 37,7 | 86. |
| $K$ | 0,15 | 0,1 |
| $n$ | 310 | 278 |
| $T_0$ (MeV) | 4 | 50 |
| $T_r$ (MeV) | $6,75.10^{-3}$ | $75.10^{-3}$ |
| $P_{air}$ (mm de Hg) | $2.10^{-6}$ | $10^{-5}$ |
| $P_{Hg}$ (mm de Hg) | $4.10^{-8}$ | $1,6.10^{-7}$ |
| $\langle Z^2 \rangle_T^{\frac{1}{2}}$ (cm) | 2,35 | 1,48 |
| | M. I. T. [9] | Genève |

Dans ce tableau, $K$ désigne le rapport de la longueur totale des sections rectilignes (sections dépourvues du champ magnétique $H$ focalisant) à la longueur totale $2\pi r_0$ des secteurs magnétiques circulaires focalisants $K = \frac{l - 2\pi r_0}{2\pi r_0}$. $P_{air}$ désigne la pression partielle de l'air $\left(\frac{4}{5} \text{ de } N_2 + \frac{1}{5} \text{ de } O_2\right)$ dans la chambre à vide. Nous avons supposé, pour fixer les idées, que le vide était réalisé par des pompes à diffusion de mercure; $P_{Hg}$ désigne la pression partielle de la vapeur de mercure dans la chambre à vide. Cette pression a été prise telle dans le tableau III que les amplitudes $\langle Z^2 \rangle^{\frac{1}{2}}$ dues à la diffusion par le mercure soient sensiblement égales aux amplitudes $\langle Z^2 \rangle^{\frac{1}{2}}$ dues à la diffusion par l'air

$$\langle Z^2 \rangle_{air} = \langle Z^2 \rangle_{Hg}.$$

On a évidemment

$$\langle Z^2 \rangle_T = \langle Z^2 \rangle_{air} + \langle Z^2 \rangle_{Hg} = 2 \langle Z^2 \rangle_{air}.$$

où $\langle Z^2 \rangle_T^{\frac{1}{2}}$ désigne l'amplitude totale. Remarquons que c'est la valeur de $(a^2 + \langle Z^2 \rangle_T)^{\frac{1}{2}}$ qui détermine le nombre de protons perdus par diffusion élastique multiple, nous avons cependant porté $\langle Z^2 \rangle_T^{\frac{1}{2}}$ au tableau III afin de séparer les amplitudes dues à la diffusion des amplitudes $a$ dues à d'autres causes. L'importance de la contribution du mercure à $\langle Z^2 \rangle_T$ provient de ce que

$$Y_{Hg} = 80 \qquad Y_O = 8 \qquad Y_N = 7.$$

La situation aurait été presque identique si l'on avait employé des pompes à diffusion d'huile : une molécule d'huile comporte en effet de nombreux centres diffuseurs, ce qui compense les faibles valeurs de $Y$ relatives à ces centres. Remarquons que les valeurs de $\langle Z^2 \rangle_T^{\frac{1}{2}}$ figurant au tableau III constituent des maxima qui ne sont atteints qu'à un certain moment après l'injection, c'est-à-dire lorsque les amplitudes d'injection (qui ne sont pas dues à la diffusion, mais à diverses imperfections de fonctionnement du cosmotron) sont déjà amorties (coefficient

d'amortissement au moins de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)$. Notons enfin que les valeurs de $\langle Z^2 \rangle_T^{\frac{1}{2}}$ qui figurent au tableau III sont notablement supérieures à celles qui figurent dans la littérature : il est actuellement difficile d'élucider les causes d'un désaccord aussi important, car aucune théorie n'a été publiée pour justifier les valeurs numériques avancées.

4. **Diffusion multiple et diffusion simple.** — Pour établir les égalités (12), (13) et (15), nous avons supposé qu'il y avait diffusion multiple : les oscillations dont nous avons calculé les amplitudes résultaient en effet d'un grand nombre de collisions subies par le proton accéléré tout au long de son parcours, chacune de ces collisions n'entraînant elle-même qu'une faible modification de la trajectoire du proton, et ne pouvant à elle seule en déterminer la perte. Celle-ci apparaît alors comme le résultat de l'effet conjugué de toutes les collisions subies par le proton. Or, les valeurs de $\omega'_{\max}(T_0)$ qui figurent au tableau I sont suffisamment grandes pour que de nombreux protons puissent être directement perdus après une seule collision à déviation angulaire $\omega' > \omega'_0$, où $\omega'_0$ est l'angle de diffusion minimum conduisant à la perte directe du proton après la collision [nous verrons qu'on a en général $\omega'_0 \ll \omega'_{\max}(T_0)$]. Pour éviter cette contradiction on peut alors distinguer deux sortes de collisions [7], [10]:

1° Les collisions pour lesquelles $\omega' < \omega'_0$, qui n'entraînent pas directement la perte du proton. C'est à ces collisions que s'applique la théorie de la diffusion multiple développée dans les paragraphes précédents. On voit maintenant la raison pour laquelle on ne doit pas définir $\langle \omega'^2 \rangle$ au moyen de (11′), mais au moyen de (11) : les angles de diffusion compris entre $\omega'_0$ et $\omega'_{\max}$ qui ne contribuent pas à la diffusion multiple, ne doivent pas être retenus dans le calcul de $\langle \omega'^2 \rangle$. La même argumentation vaut aussi pour $S(T)$, mais on a

$$\int_{\omega'_{\min}}^{\omega'_{\max}} \mathrm{d}S(\omega') - \int_{\omega'_{\min}(T)}^{\omega'_0} dS(\omega') \ll \int_{\omega'_{\min}}^{\omega'_{\max}} \mathrm{d}S(\omega') = S(T),$$

puisque dans le domaine d'énergie qui contribue sensiblement à la diffusion, la relation $\omega'_0 \gg \omega'_{\min}(T)$ est vérifiée.

2° Les collisions pour lesquelles $\omega' > \omega'_0$, qui entraînent directement la perte du proton. C'est cette « diffusion simple » qui en résulte que nous devons examiner maintenant.

*a. Calcul de* $\omega'_0$. — Un très grand soin doit être apporté à la détermination de $\omega'_0$, car nous verrons que les pertes de protons par diffusion simple sont proportionnelles à $\frac{1}{\omega'^2_0}$. Nous traitons d'abord le cas du cosmotron classique, supposé dépourvu de sections rectilignes (c'est-à-dire de sections sans champ magnétique) afin de simplifier l'exposé. Considérons donc un proton, effectuant autour de l'orbite centrale des oscillations verticales

$$Z = a \sin \frac{\sqrt{n}\,\sigma}{r_0}$$

d'amplitude $a$, qui subit un choc au point $\sigma$ de sa trajectoire. La déviation angulaire $\omega_{0Z}$ $\big($dans le plan $\vec{\theta}O\vec{Z}\big)$ qui provoquera des oscillations d'amplitude $A$ ($A$ étant la demi-ouverture verticale de la chambre à vide) est donnée par

$$Z^2 + \frac{r_0^2}{n}(Z' + \omega_{0Z})^2 = A^2$$

ou encore, en remplaçant $Z$ et $Z'$ par leurs valeurs

$$\omega_{0Z}^2 + \left(\frac{2a\sqrt{n}}{r_0}\cos\frac{\sqrt{n}\,\sigma}{r_0}\right)\omega_{0Z} - \frac{n}{r_0^2}(A^2 - a^2) = 0. \qquad (16)$$

Puisque $A > a$, cette équation possède une racine positive $\omega_{01}$ et une racine négative $\omega_{02}$. Il en résulte que pour que le proton soit perdu, il faut et il suffit que la déviation angulaire $\omega_Z$ engendrée par le choc subi en $\sigma$ vérifie l'une des deux inégalités

$$\omega_Z > \omega_{01} > 0, \qquad \omega_Z < \omega_{02} < 0. \qquad (17)$$

La quantité $\omega'_0$ qui apparaît dans (12), (13) et (15) n'y figure que par l'intermédiaire de son logarithme. Il en résulte que la valeur de $\omega'_0$ qui doit être portée dans ces équations n'a pas besoin d'être connue avec une grande précision. Nous prendrons $\omega'_0 = \omega_{01}\sqrt{2}$ lorsque $a = 0$. L'équation (16) possède alors les deux racines $\pm\omega_{01}$; nous avons multiplié par $\sqrt{2}$ puisque par raison de symétrie, on a

$$\omega'^2\rangle = 2\langle \omega_Z^2 \rangle.$$

Ainsi, $\omega'_0 = \omega_{01}\sqrt{2}$ représente la déviation angulaire minimum que doit subir un proton qui parcourt l'orbite centrale $r = r_0$ pour être perdu. On trouve

$$\omega'_0 = \sqrt{2}\,\frac{\sqrt{n}\,A}{r_0}.$$

Pour un cosmotron pourvu de sections rectilignes, il viendrait de même

$$\omega'_0 = \frac{\sqrt{2}\sqrt{n}\,A}{\sqrt{1 + K}\,r_0}. \qquad (18)$$

La définition de $\omega'_0$ pour un cosmotron à forte convergence peut être donnée en raisonnant suivant les mêmes lignes. Les angles-limite $\omega_{01}$ et $\omega_{02}$ sont maintenant racines de

$$A^2 - a^2 = \frac{1}{\sin^2\varphi}\,s_{12}(\sigma_m)\big[\quad \delta U_X(\sigma, X, X', \omega_{0Z}) + \delta U_Z(\sigma, Z, Z', \omega_{0Z})\big], \qquad (19)$$

où $\partial U_X(\sigma, X, X', \omega_{0Z})$ et $\partial U_Z(\sigma, Z, Z', \omega_{0Z})$ s'obtiennent en faisant dans (4)

$$\omega_X = \omega_Z = \omega_{0Z};$$

$a$ désigne l'amplitude des oscillations effectuées par le proton avant le choc. On suppose toujours que le point de fonctionnement du cosmotron est voisin de l'axe de la région de stabilité. Pour que le proton soit perdu, il faut et il suffit que la déviation angulaire $\omega_Z$ engendrée par le choc subi en $\sigma$ vérifie, soit $\omega_Z > \omega_{01} > 0$, soit $\omega_Z < \omega_{02} < 0$. De même que pour le cosmotron classique, nous définirons ici $\omega'_0$ comme la déviation angulaire minimum que doit subir un proton qui parcourt l'orbite centrale pour être perdu. On trouve ainsi, en faisant dans (19), $a = X = X' = Z = Z' = 0$,

$$\omega'_0 = \frac{A \sin\varphi}{\sqrt{|s_{12}(\sigma_m)|}} \left\langle \sqrt{\left|\frac{1}{s_{12}(\sigma)}\right|} \right\rangle, \qquad (20)$$

la valeur moyenne étant prise sur une période du cosmotron, de $\sigma = 0$ à $\sigma = \sigma_p$, par exemple. Les valeurs de $\omega'_0$, que l'on doit porter dans les équations (12), (13) et (15), figurent au tableau IV. Comme les angles de diffusion $\omega'$ que l'on a à considérer dans la théorie de la diffusion multiple sont inférieurs à $\omega'_0$, on voit que l'approximation utilisée pour déduire (12), (13) et (15), qui a consisté à faire $\operatorname{tg}\omega' = \omega'$, est entièrement valable. De plus, on a $\omega'_{max}(T) \gg \omega'_0$ tant que $T \leq 500$ MeV. On vérifie alors aisément que la substitution de $\omega'_0$ à $\omega'_{max}$ dans les expressions (12), (13) et (15) du carré moyen $\langle Z^2 \rangle$ des amplitudes dues à la diffusion aboutit à diviser cette quantité par un facteur de l'ordre de deux.

TABLEAU IV.

| A (cm). | n. | $r_0$ (m). | $\omega'_0$ (radians). | |
|---|---|---|---|---|
| 2,25......... | 310 | 37,7 | $2,4.10^{-3}$ | M. I. T. |
| 4,5.......... | 278 | 86 | $2,3.10^{-3}$ | Genève |
| 8............ | 0,6 | 10 | $8,8.10^{-3}$ | Cosmotron classique de Brookhaven |

*b. Les pertes de protons résultant de la diffusion simple* [11]. — Il nous faut évaluer maintenant la quantité

$$S_1(T) + S_2(T) = S_s(T),$$

où $S_1(T)$ représente la section totale relative aux chocs pour lesquels $\omega_Z > \omega_{01}$, et $S_2(T)$ la section totale relative aux chocs pour lesquels $\omega_Z < \omega_{02}$. Nous développerons la théorie pour un cosmotron classique, le raisonnement serait analogue pour un cosmotron à forte convergence. Nous emploierons l'approximation de Born qui, dans le cas le plus défavorable d'une énergie d'injection $T_0$ très faible ($T_0 \approx 5$ MeV), ne pourra conduire qu'à une surestimation de 12 pour 100 au maximum du nombre de protons perdus.

On a

$$\left.\begin{aligned} S_1(T) &= \frac{1}{2}\int_{\omega_{01}\sqrt{2}}^{\omega'_{max}(T)} dS(\omega'), \\ S_2(T) &= \frac{1}{2}\int_{-\omega_{02}\sqrt{2}}^{\omega'_{max}(T)} dS(\omega'). \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

En effet, les chocs avec $\omega_Z > 0$ ont une probabilité égale à ceux avec $\omega_Z < 0$. Les limites inférieures des intégrales se justifient en remarquant que $\langle \omega'^2 \rangle = 2 \langle \omega_Z^2 \rangle$. La probabilité pour qu'un proton soit perdu par diffusion simple, pendant que son énergie cinétique varie de $T$ à $T + dT$, est donnée par

$$\begin{aligned} &\frac{l}{T_r}\sum_q M_q S_{sq}(T)\,dT \\ &= dT\sum_q \frac{l}{T_r} M_q\big(S_{1q}(T) + S_{2q}(T)\big) \\ &= \sum_q \frac{l\pi e^4}{4 T_r T^2} M_q Y_q^2 \left[\frac{1}{\omega_{01}^2} + \frac{1}{\omega_{02}^2} - \frac{2}{\omega'^2_{max}(T)}\right] dT, \end{aligned}$$

$l$ étant la longueur de l'orbite centrale fermée. Les quantités $\omega_{01}$ et $\omega_{02}$ étant racines de (16), un calcul simple permet de montrer que

$$\frac{1}{\omega_{01}^2} + \frac{1}{\omega_{02}^2} = \frac{2 r_0^2}{n} \frac{A^2 + a^2\cos\left(2\sqrt{n}\,\frac{\sigma}{r_0}\right)}{(A^2 - a^2)^2} \gg \frac{2}{\omega'^2_{max}(T)},$$

l'inégalité étant vérifiée jusqu'à des énergies $T_F$ de l'ordre de 600 MeV. Désignons par $V(T)$ le nombre de protons présents dans la chambre à vide lorsque leur énergie cinétique est devenue égale à $T$; le nombre de protons perdus par diffusion simple pendant que leur énergie passe de $T$ à $T + dT$ est donc égal à ($T < T_F$)

$$V(T) f(T)\,dT = V(T) \sum_q \frac{M_q l \pi Y_q^2 e^4 r_0^2}{2 T_r n} \frac{A^2}{(A^2 - a^2)^2} \frac{dT}{T^2},$$

en supposant que tous les protons oscillent autour de l'orbite centrale $r = r_0$ avec la même amplitude $a$, et en remarquant que $\left\langle \cos\frac{2\sqrt{n}\,\sigma}{r_0} \right\rangle = 0$. Le nombre total de protons perdus par diffusion simple est donc sensiblement égal à

$$\begin{aligned} v V(T_0) &= \int_{T_0}^{T_F} V(T) f(T)\,dT \\ &= V(T_\alpha)\int_{T_0}^{T_F} f(T)\,dT \\ &= \sum_q \frac{l\pi e^4 r_0^2}{2 T_r T_0 n} \frac{A^2}{(A^2 - a^2)^2} M_q Y_q^2 V(T_\alpha). \end{aligned} \qquad (22)$$

La fonction $V(T)$ étant lentement variable, on a utilisé pour l'intégration le théorème de la moyenne, $T_\alpha$ est une énergie comprise entre $T_0$ et $T_F$. Les chocs subis à des énergies supérieures à $T_F$ ne contribuent pratiquement plus aux pertes par diffusion simple.

Considérons maintenant un cosmotron à forte convergence. Le raisonnement est analogue sauf que l'on doit écrire en ce cas [au lieu de (21)]

$$S_1(T) = \frac{1}{2}\int_{\omega_{01}\sqrt{2}}^{\omega'_{\max}} dS(\omega'), \qquad S_2(T) = \frac{1}{2}\int_{-\omega_{02}\sqrt{2}}^{\omega'_{\max}} dS(\omega'),$$

$\omega_{01}$ et $\omega_{02}$ étant racines de (19). Nous effectuons le calcul pour un cosmotron comportant $N$ périodes, chaque période se composant de deux lentilles d'égale longueur $\frac{l}{2N}$ et à gradients $-\frac{r_0}{H}\frac{dH}{dr}$ opposés. Le nombre total de protons perdus par diffusion simple dans un tel appareil est alors

$$v\,V(T_0) = \lambda\left(\frac{\sqrt{n}}{N}\right)\sum_q \frac{l\pi e^4 r_0^2}{T_r T_0 n} \times \frac{A^2}{(A^2 - a^2)^2} M_q Y_q^2 I(T_\alpha) \quad (23)$$

en supposant toujours que tous les protons effectuent autour de l'orbite centrale des oscillations d'amplitude égale à $a$

$$n = \left|-\frac{r}{H}\frac{dH}{dr}\right|.$$

On a, avec une bonne approximation,

$$\lambda\left(\frac{\sqrt{n}}{N}\right) \approx R\left(\frac{\sqrt{n}}{N}\right),$$

où $R\left(\frac{\sqrt{n}}{N}\right)$ est la fonction qui figure au tableau II. La proportion $v$ de protons perdus par diffusion simple est portée au tableau V. Notre ignorance des valeurs exactes de $\frac{V(T_\alpha)}{V(T_0)}$ introduit un certain élément d'indétermination sur les valeurs de $v$; il est évident que si la proportion de protons perdus par suite d'autres mécanismes que la diffusion simple est très importante au début de l'accélération ($T < 500$ MeV), le rapport $\frac{V(T_\alpha)}{V(T_0)}$ sera assez faible; mais en revanche, le rapport $\frac{a}{A}$ prendra alors des valeurs élevées pour un grand nombre de protons. Inversement, lorsque les pertes par d'autres mécanismes que la diffusion simple sont suffisamment réduites au début de l'accélération, le rapport $\frac{V(T_\alpha)}{V(T_0)}$ prendra des valeurs plus élevées, alors que le rapport $\frac{a}{A}$ sera plus faible. Dans les deux cas envisagés, la proportion de protons perdus par diffusion simple est « à peu près » la même. Les considérations qui précèdent permettent d'avoir une idée sur la précision des valeurs de $v$ qui figurent au tableau V.

TABLEAU V.

| $A$ (cm). | $\frac{a}{A}$. | $\frac{V(T_\alpha)}{V(T_0)}$. | $p_{air}$ (mm de Hg). | $v$ (pour 100). | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2,25... | 0,4 | 0,75 | $2.10^{-6}$ | 15,9 | M. I. T. |
| 4,5.... | 0,4 | 0,8 | $10^{-5}$ | 2,1 | Genève |
| 8...... | 0,2 | 0,9 | $5.10^{-6}$ | 6,5 | Cosmotron classique de Brookhaven |

Comme pour la diffusion multiple, le calcul de $v$ a été fait pour l'air $\left(\frac{4}{5}\text{ de } N_2 + \frac{1}{5}\text{ de } O_2\right)$, puis le résultat obtenu a été multiplié par 2 pour tenir compte de la présence de molécules d'huile (ou de mercure) dans la chambre à vide. Toutes proportions égales, les pertes de protons par diffusion simple sont beaucoup plus importantes dans un cosmotron à forte convergence que dans un cosmotron classique. Signalons pour terminer que nos résultats sont en désaccord avec ceux de Greenberg et Berlin [10] et de Courant [7] (pour un cosmotron classique), qui estiment que les pertes de protons par diffusion simple sont négligeables.

Manuscrit reçu le 2 juillet 1955.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] BLACHMAN et COURANT. — *Phys. Rev.*, 1948, **74**, 140; *Phys. Rev.*, 1949, **75**, 315.
[2] SEIDEN J. et LURCAT F. — *C. R. Acad. Sc.*, 1955, **240**, 2067.
[3] SEIDEN J. — *C. R. Acad. Sc.*, 1953, **237**, 1075.
[4] SEIDEN J. — *Ann. Physique*, 1955, **10**, 259; *C. R. Acad. Sc.*, 1954, **239**, 798.
[5] MOTT et MASSEY. — The Theory of Atomic Collisions, Oxford, 1949.
[6] BETHE H. A. et ASHKIN J., dans SEGRÉ E. — *Exp. Nuclear Physico*, I, Wiley, 1953.
[7] COURANT E. D. — *Rev. Sc. Instr.*, 1953, **24**, 836.
[8] SEIDEN J. — *Thèse*, chap. VI, non publié.
[9] Design Study for a 15 BeV Accelerator. Technical Report, n° 60, M. I. T.
[10] GREENBERG et BERLIN. — *Rev. Sc. Instr.*, 1951, **22**, 293.
[11] SEIDEN J. — *C. R. Acad. Sc.*, 1955, **240**, 2519.

# PROPRIÉTÉS ÉLECTROMÉCANIQUES DES CÉRAMIQUES AU TITANATE DE BARYUM

Par G. MESNARD et L. EYRAUD,
Institut de Physique Générale de l'Université de Lyon.

**Sommaire.** — On a préparé par des techniques de compression et de frittage des céramiques au titanate de baryum ayant la forme de disques argentés sur leurs faces planes et formant condensateurs. On a étudié les propriétés élastiques, électrostrictives et diélectriques par l'intermédiaire des résonances radiales excitées dans la céramique par une tension H. F. On a en particulier déterminé les éléments du circuit équivalent ainsi que les coefficients de surtension et de couplage électromécanique en fonction du champ électrique statique appliqué variable jusqu'à 20 000 V/cm et de la température entre — 150 et + 150° C.

**Introduction.** — On connaît l'effet piézoélectrique présenté par les monocristaux de substances dont le réseau ne présente pas de centre de symétrie. Cet effet est caractérisé par une déformation du cristal proportionnelle au champ électrique appliqué. On sait que tous les corps présentent aussi l'électrostriction; c'est une déformation proportionnelle au carré du champ appliqué. Celle-ci est généralement très faible; elle est importante dans les corps ferroélectriques, comme le titanate de baryum.

Les corps ferroélectriques ont la propriété d'être spontanément polarisés dans certaines conditions et la polarisation observée est influencée par un champ électrique. C'est ainsi que l'application d'un champ alternatif se traduit par une variation de la polarisation conduisant à un cycle d'hystérésis : le champ électrique agit sur les dipôles et peut inverser leur sens avec une hystérésis analogue à celle des corps ferromagnétiques. L'analogie avec le magnétisme s'étend à l'existence de domaines ferroélectriques. Sur un échantillon qui vient d'être préparé, ceux-ci sont généralement orientés dans diverses directions et la polarisation résultante est nulle. L'application d'un champ électrique conduit à une polarisation non nulle et, lorsqu'on cesse d'appliquer le champ, il subsiste une polarisation rémanente.

Le titanate de baryum, sous la forme d'un monocristal constitué par un seul domaine, présente le phénomène de piézoélectricité car le milieu cristallin n'a pas de centre de symétrie. Mais sous la forme d'une céramique constituée par un grand nombre de grains orientés au hasard l'effet linéaire disparaît; il en serait de même pour tous les corps piézoélectriques. Un effet quadratique ou électrostriction subsiste et c'est elle que nous étudierons. Cette étude est intéressante non seulement en raison des applications possibles de l'effet électromécanique des céramiques mais aussi parce qu'elle jette quelque lumière sur les propriétés ferroélectriques du titanate de baryum.

Divers auteurs ont déjà étudié les propriétés des céramiques au titanate de baryum [1]. Parmi les premiers essais électromécaniques, citons ceux de Shepard Roberts [2]. Nous avons repris certaines mesures, ce qui nous a permis de préciser divers points. D'autre part des mesures nouvelles seront décrites, qui apportent de nouveaux éléments pour l'interprétation théorique des phénomènes ferroélectriques.

**Préparation des échantillons.** — La première opération consiste à préparer le titanate. On part de carbonate de baryum et d'oxyde de titane aussi purs que possible. Ces corps sont d'abord soigneusement tamisés et broyés (tamis non métalliques de préférence). Le mélange est alors fait en proportions équimoléculaires et l'homogénéité est assurée par une agitation intense. On chauffe à l'air vers 1200° C dans un creuset d'alumine frittée pure ou à défaut de platine (qui ne diffuse de façon appréciable dans le titanate qu'au-dessus de 1200° C). Le titanate ainsi obtenu est lavé à l'aice chlorhydrique, puis broyé et tamisé.

Le produit est alors additionné d'une petite quantité de liant destinée à permettre la compression de la poudre. Cette compression s'effectue dans une matrice spéciale sous une pression de 1 à 2 t/cm² environ; on obtient ainsi de petits disques circulaires plats. Le liant est un liant organique qui disparaît ensuite complètement par un étuvage et ne risque pas par suite de modifier les propriétés électriques.

Les comprimés sont alors frittés. La cuisson s'effectue dans un four à air jusqu'à une température comprise entre 1250 et 1400° C; les comprimés sont posés dans le four sur une plaquette de corindon. Le frittage produit un retrait de l'ordre de 20 pour 100; la structure est microcristalline avec une porosité

très faible (c'est cette condition essentielle qui impose une température de frittage suffisante). Dans les limites de températures que nous avons indiquées, l'influence de la température de frittage sur les propriétés est peu importante.

L'électrostriction a été étudiée en réalisant des condensateurs avec les disques obtenus. Pour cela ceux-ci sont enduits sur leurs faces planes d'un vernis à l'argent séché par étuvage, qui donne un excellent contact.

**Dispositif expérimental.** — Les échantillons ainsi obtenus sont alors montés sur le bâti d'étude. Une des conditions imposées est que l'on puisse appliquer des champs électriques élevés à la céramique dans une large zone de températures. Cela serait difficile dans l'air car, aux basses températures, l'humidité de l'atmosphère conduirait à un dépôt nuisible de glace sur l'échantillon. On ne peut davantage placer l'échantillon dans un liquide isolant car ce liquide amortirait et perturberait les vibrations mécaniques qui prennent naissance dans la céramique; un simple trempage préalable dans l'huile n'est pas une solution satisfaisante. Nous avons opéré sous vide.

La température était obtenue à l'aide d'un couple en contact avec l'une des électrodes servant à appliquer la tension à la céramique et le plus près possible de celle-ci; cette condition est nécessaire pour éviter de faire une mauvaise mesure de la température, car les échanges thermiques sous vide poussé sont très limités. La chaleur ou le froid étaient apportés par une source extérieure à l'enceinte vidée; la transmission de chaleur ou de froid étant mauvaise, on a eu recours à un artifice pour obtenir avec sûreté la température désirée de l'échantillon, que l'on a fait varier entre —180 et +200°C. Le cycle de température était décrit très lentement tandis que les mesures étaient effectuées; on évitait ainsi les erreurs dues à l'inertie thermique; on a d'ailleurs toujours opéré par températures croissantes puis décroissantes et pris une moyenne.

Les amenées de tension à la céramique n'étaient pas soudées sur le vernis (car au retrait le vernis risquerait de se craqueler, conduisant à des mesures défectueuses), mais on a réalisé un contact large établi par une légère pression mécanique. On a appliqué des champs électriques s'élevant jusqu'à 20 000 V/cm; les échantillons avaient 1 à 2 mm d'épaisseur et un diamètre voisin de 10 mm en général. Avant de décrire les montages de mesure, il est nécessaire de rappeler les résultats essentiels des travaux antérieurs.

**Théorie de l'électrostriction des céramiques au titanate de baryum.** — La théorie de l'électrostriction des céramiques au titanate a été faite par Mason [3]. Nous rappellerons d'abord brièvement les étapes essentielles de la théorie. On part de l'expression de l'enthalpie élastique $H_1$, définie, en notation tensorielle, par

$$H_1 = U - S_{ij} T_{ij},$$

où $U$ est l'énergie, $T_{ij}$ les six composantes des tensions mécaniques, $S_{ij}$ les six composantes des déformations mécaniques. En tenant compte de l'expression de $\mathrm{d}U$, on a

$$\mathrm{d}H_1 = -S_{ij}\,\mathrm{d}T_{ij} + E_m\,\mathrm{d}\delta_m + \theta\,\mathrm{d}\sigma.$$

Dans cette expression interviennent les composantes $E_m$ du champ électrique appliqué, les composantes de $\delta$ qui est égal à $\frac{D}{4\pi}$, $D$ étant le déplacement électrique (c'est parfois $\delta$ que l'on appelle déplacement électrique, $D$ étant l'induction électrique), la température absolue $\theta$ et l'entropie $\sigma$. Les variables choisies sont les tensions mécaniques et les déplacements électriques; il convient de faire intervenir le déplacement électrique plutôt que le champ électrique car, en raison de l'hystérésis, ce dernier ne définit pas complètement l'état électrique de la céramique.

Les mesures seront faites en haute-fréquence dans des conditions sensiblement adiabatiques. On peut donc négliger le dernier terme de l'expression de $\mathrm{d}H_1$ et exprimer $S_{ij}$ et $E_m$ en fonction des variables par l'intermédiaire d'un développement autour de leur zéro :

$$S_{ij} = \frac{\partial S_{ij}}{\partial T_{kl}}\,\mathrm{d}T_{kl} + \frac{\partial S_{ij}}{\partial \delta_n}\,\mathrm{d}\delta_n + \frac{1}{2!} \times \left[ \frac{\partial^2 S_{ij}}{\partial T_{kl}\,\partial T_{qr}}\,\mathrm{d}T_{kl}\,\mathrm{d}T_{qr} + 2\,\frac{\partial^2 S_{ij}}{\partial T_{kl}\,\partial \delta_n}\,\mathrm{d}T_{kl}\,\mathrm{d}\delta_n + \frac{\partial^2 S_{ij}}{\partial \delta_n\,\partial \delta_0}\,\mathrm{d}\delta_n\,\mathrm{d}\delta_0 \right],$$

$$E_m = \frac{\partial E_m}{\partial T_{kl}}\,\mathrm{d}T_{kl} + \frac{\partial E_m}{\partial \delta_n}\,\mathrm{d}\delta_n + \frac{1}{2!} \times \left[ \frac{\partial^2 E_m}{\partial T_{kl}\,\partial T_{qr}}\,\mathrm{d}T_{kl}\,\mathrm{d}T_{qr} + 2\,\frac{\partial^2 E_m}{\partial T_{kl}\,\partial \delta_n}\,\mathrm{d}T_{kl}\,\mathrm{d}\delta_n + \frac{\partial^2 E_m}{\partial \delta_n\,\partial \delta_0}\,\mathrm{d}\delta_n\,\mathrm{d}\delta_0 \right] + \frac{1}{3!}\,\frac{\partial^3 E_m}{\partial \delta_n\,\partial \delta_0\,\partial \delta_p}\,\mathrm{d}\delta_n\,\mathrm{d}\delta_0\,\mathrm{d}\delta_p + \ldots$$

On n'a fait intervenir des termes au-delà de second ordre que pour le champ électrique résultant de variations du déplacement électrique, afin de tenir compte de la variation de la constante diélectrique avec le champ qui n'est pas simple.

Des considérations de symétrie de la céramique, et le fait que $\mathrm{d}H_1$ doit être une différentielle totale exacte montrent que certains des coefficients sont nuls :

$$\frac{\partial S_{ij}}{\partial \delta_n} = \frac{\partial E_m}{\partial T_{kl}} = \frac{\partial^2 S_{ij}}{\partial T_{kl}\,\partial \delta_n} = \frac{\partial^2 E_m}{\partial T_{kl}\,\partial T_{qr}} = \frac{\partial^2 E_m}{\partial \delta_n\,\partial \delta_0} = 0.$$

Si l'on admet la loi de Hooke, le coefficient $\frac{\partial^2 S_{ij}}{\partial T_{kl}\,\partial T_{qr}}$

est également nul, de sorte que finalement on n'a à faire intervenir que $\frac{\partial S_{ij}}{\partial T_{kl}}$ qui correspond aux propriétés élastiques mesurées à déplacement électrique nul,

$$\frac{\partial^2 S_{ij}}{\partial \delta_n \, \partial \delta_0} = - \frac{\partial^2 E_m}{\partial T_{ij} \, \partial \delta_n}$$

qui correspondent à l'effet d'électrostriction, tandis que les autres coefficients traduisent les propriétés diélectriques mesurées à tensions mécaniques constantes. Ajoutons que les tenseurs qui interviennent se simplifient compte tenu des symétries d'une céramique.

Ainsi est expliqué l'effet électrostrictif, qui doit être distingué de l'effet piézoélectrique quadratique qui ne se présente pas pour les céramiques et qui correspond à la non-nullité de certains des coefficients qui sont ici nuls. Insistons sur le fait que le déplacement mécanique correspondant à l'électrostriction varie comme le carré du déplacement électrique et non comme le carré du champ électrique; pour les corps ferroélectriques, $E$ ne varie pas comme $\delta$, même si l'on néglige l'hystérésis.

Il a été constaté expérimentalement qu'une céramique au titanate de baryum se déformait sous l'action d'un champ électrique conformément à la théorie précédente. Plusieurs sortes de déformations sont possibles suivant les conditions : c'est ainsi que dans le cas d'un disque plat comme ceux que nous utilisons, l'application d'un champ électrique suffisamment intense dans le sens de l'épaisseur produit une augmentation de l'épaisseur et une contraction radiale; la contraction est de l'ordre de la moitié de l'augmentation d'épaisseur. Ces précisions ont permis à Mason de suggérer un mécanisme de l'électrostriction des céramiques au titanate de baryum. Lorsque la céramique est vierge, les domaines sont également distribués dans toutes les directions. L'application d'un champ électrique conduit à des changements d'orientations des polarisations des domaines et à des déplacements de parois séparant des domaines, de telle sorte qu'une polarisation apparaît dans le sens du champ, les domaines n'étant plus orientés au hasard. Or, il ressort des mesures aux rayons X effectuées par Miss Megaw [4] que lorsque le titanate de baryum est ferroélectrique il n'a plus la structure cubique qu'il possède au-dessus du point de Curie; c'est ainsi qu'à la température ambiante il est tétragonal : par rapport à la structure cubique cela correspond à un allongement dans le sens de la polarisation et à une contraction moitié dans la direction des deux autres axes, l'axe ferroélectrique devant plus long que les autres de 1 pour 100. On voit donc immédiatement la relation qui existe entre les effets de polarisation diélectrique et les effets d'électrostriction et comment une étude des déplacements mécaniques provoqués par un champ électrique nous renseigne sur les orientations des domaines ferroélectriques. La polarisation induite ordinaire produite par le champ intervient aussi (plus ou moins suivant les conditions) dans la polarisation totale et dans les déplacements mécaniques; cela résulte des essais de Caspari et Merz sur les monocristaux de titanate de baryum [4']. Cette contribution est très importante lorsque le champ est élevé, lorsque le champ décroît vers zéro à partir d'une valeur élevée et aussi dans le cas des vibrations que nous envisagerons ci-dessous autour d'un champ électrique moyen; ce sont les cas où la variation de la polarisation est relativement faible parce qu'il n'y a pas de grandes modifications dans les orientations de domaines. Il est d'ailleurs un peu arbitraire de séparer polarisation induite et polarisation spontanée; dans une théorie des corps ferroélectriques comme celle de Mason, on calcule directement la polarisation totale obtenue sous l'action d'un champ donné.

**Circuit équivalent à la céramique.** — La théorie précédente permet de mesurer les constantes élastiques, électrostrictives et diélectriques de la céramique. Plusieurs techniques d'application sont possibles [5]. Nous avons utilisé la méthode utilisant les résonances de la céramique. Supposons qu'un champ continu suffisamment grand soit appliqué à la céramique et superposons un champ électrique alternatif de faible amplitude. On constate que l'impédance de la céramique correspondant à la tension alternative appliquée dépend beaucoup de la fréquence de cette tension. Cette impédance est telle que l'on peut faire intervenir un circuit équivalent.

Considérons le circuit de la figure 1. Il possède une fréquence de résonance et une fréquence d'antirésonance correspondant au minimum et au maximum d'impédance. Un tel circuit, avec des fréquences de résonance et d'antirésonance très voisines, représente sensiblement la céramique pour des fréquences voisines des fréquences de résonance et d'antirésonance. Dans ce circuit, $C$ correspond à la capacité normale du condensateur constitué par la céramique, tandis que le circuit résonnant série ($\rho$, $\lambda$, $\gamma$) provient de l'effet électromécanique. Le champ électrique H. F. produit des déformations qui se propagent dans le matériau comme les

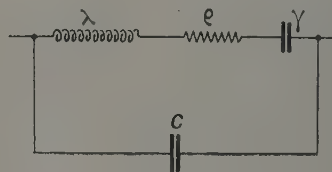


Fig. 1.

vibrations élastiques normales; ces vibrations sont réfléchies sur les parois et l'on obtient la résonance pour certaines fréquences bien déterminées, qui dépendent de la forme et des dimensions du matériau et de la façon dont est appliqué le champ; le circuit ($\rho$, $\lambda$, $\gamma$) traduit une telle résonance. Plusieurs fréquences de résonance peuvent être mises en évidence pour une céramique donnée, de sorte que le circuit équivalent complet comprend une série de circuits analogues à celui de la figure 1, mais au voisinage d'une résonance le circuit simple se justifie parfaitement et la détermination des éléments $\lambda$, $\rho$ et $\gamma$ donne les résultats essentiels sur les propriétés électromécaniques de la céramique.

Plusieurs modes de vibration peuvent être excités dans une céramique. Nous opérons sur des disques soumis à un champ continu et au champ H. F. appliqués l'un et l'autre entre les faces planes. Deux modes peuvent alors être excités : une résonance radiale et une résonance en épaisseur se manifestent. Nous avons étudié la résonance radiale fondamentale uniquement et nous verrons les renseignements que l'on peut en déduire en ce qui concerne les propriétés élastiques, diélectriques et électrostrictives de la céramique.

Aux fréquences très élevées, le circuit équivalent se réduit sensiblement à la capacité $C$; il n'y a plus alors de vibrations possibles pouvant être excitées. On mesure donc par l'intermédiaire de $C$ la constante diélectrique à déplacement mécanique nul. Aux fréquences très basses, le circuit résonnant ($\lambda$, $\rho$, $\gamma$) se réduit sensiblement à la capacité $\gamma$, et la capacité que l'on mesure pour la céramique correspond à la somme des capacités $C$ et $\gamma$; lorsqu'il y a plusieurs résonances, plusieurs circuits résonnants tels que ($\rho$, $\lambda$, $\gamma$) interviennent en parallèle sur $C$ de sorte que, tandis qu'à une fréquence suffisamment élevée on mesure toujours $C$, à une fréquence suffisamment basse on mesure la somme $C + \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots$. On voit aussi que chaque résonance peut être étudiée séparément comme si elle était seule en travaillant au voisinage de la fréquence de résonance et en admettant que la céramique est équivalente au circuit de la figure 1, mais $C$ n'est pas exactement la capacité de la céramique à déplacement mécanique nul.

**Montages de mesure.** — Nous avons déterminé les éléments du schéma équivalent à l'aide de deux méthodes indépendantes. Les mesures faites sont des mesures d'amplitudes et de fréquences.

1° *Méthode de la crevasse.* — Le montage rappelle celui qui est utilisé couramment pour étudier la résonance des quartz; il est seulement adapté pour permettre la superposition d'une tension continue à la tension H. F. Le schéma est celui de la figure 2. La source H. F. excite un circuit oscillant comprenant une capacité variable et, en parallèle sur celle-ci, la céramique en série avec une capacité bien isolée de valeur élevée qui permet l'application de la haute tension continue sur la céramique. L'oscillographe cathodique donne sensiblement la tension H. F. obtenue aux bornes de la céramique.

Compte tenu du schéma équivalent de la céramique, on voit aisément que l'amplitude de la réponse lue sur l'oscillographe passe, lorsque la fréquence varie, par deux maxima séparés par un minimum, ce dernier correspondant sensiblement à la résonance de la céramique.

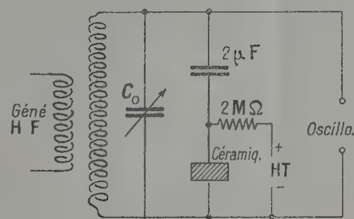


Fig. 2.

De cette réponse on peut déduire les caractéristiques de la céramique. Les calculs se simplifient si l'on règle la capacité variable du circuit oscillant de façon que l'amplitude des deux maxima soit la même; le minimum est alors sensiblement au milieu de l'intervalle entre les deux maxima qui, pour nos céramiques comme pour le quartz, sont relativement très rapprochés, et l'on peut dire que la fréquence de résonance du circuit oscillant obtenu en enlevant la céramique est égale à la fréquence de résonance de la céramique, qui se trouve mesurée avec une grande précision. On mesure en outre l'écart des fréquences correspondant aux deux maxima, l'amplitude à la résonance et l'amplitude obtenue à la résonance lorsque la céramique est enlevée. On détermine ainsi complètement le circuit équivalent, c'est-à-dire le comportement électromécanique et les propriétés diélectriques.

Il est particulièrement commode de faire l'étude à l'aide d'un générateur à modulation de fréquence avec lequel on peut voir se dessiner sur l'oscillographe la courbe de réponse en fonction de la fréquence, ce qui facilite la recherche des résonances et leur analyse, et améliore la précision des mesures de différences de fréquences. La figure obtenue sur l'oscillographe au moment du réglage de l'égalité des amplitudes des deux maxima est aisément analysée (*fig.* 3). On observe quelquefois des résonances multiples et des résonances secondaires qui peuvent provenir de défectuosités de la céramique ou de réflexions des vibrations sur des surfaces internes de la céramique ou des parois de domaines. La méthode ne doit être utilisée qu'avec de faibles fréquences de répétition de la modulation de fréquence, sinon la courbe de réponse se trouve influencée par la modulation.

2° *Méthode directe.* — Le deuxième montage donne plus directement les résultats cherchés : l'oscillateur H. F. attaque sans intermédiaire la céramique dont on détermine l'impédance aux diverses fréquences en déterminant le courant qui la traverse. La difficulté de réalisation réside dans le fait que le générateur doit fournir une tension suffisamment élevée et stable à une fréquence bien

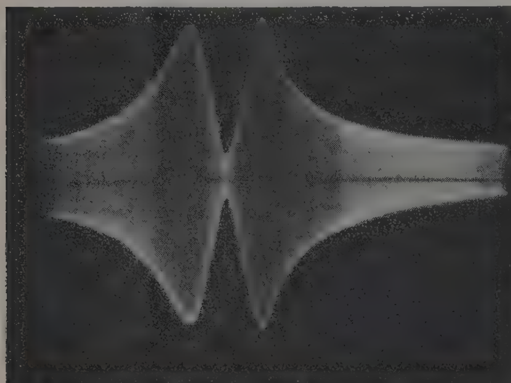


Fig. 3.

stable malgré les grandes variations d'impédance de la céramique. Cela a été obtenu en disposant à la suite d'un générateur H. F. classique (générateur à modulation de fréquence éventuellement) un amplificateur qui élève le niveau de sortie, isole le générateur de la céramique afin d'éviter toute réaction, et amène l'impédance équivalente de la source à une valeur très faible.

Le montage complet est représenté sur la figure 4. La résistance aux bornes de laquelle on lit la tension

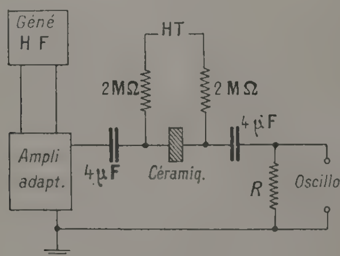



Fig. 4.

pour déterminer le courant doit rester assez faible vis-à-vis de l'impédance de la céramique; cela exige une importante amplification de la tension obtenue qui est lue sur l'écran d'un oscillographe cathodique ou sur un voltmètre électronique. La figure montre également le dispositif qui permet d'appliquer la tension continue à la céramique : elle est appliquée à travers deux résistances de plusieurs mégohms, tandis que deux fortes capacités auxiliaires assurent le blocage de la haute tension. Ces capacités n'introduisent qu'une impédance série négligeable, tandis que l'impédance parallèle due à la source de haute tension est très élevée.

On a mesuré, pour obtenir les quatre éléments du circuit équivalent, les quatre grandeurs suivantes : les fréquences de résonance et d'antirésonance et les amplitudes à la résonance et à l'antirésonance. Il y a lieu de faire une correction en ce qui concerne l'amplitude à la résonance. En effet, l'impédance de la céramique à la résonance est assez faible pour que, en dépit du choix d'une résistance assez faible pour la détermination du courant, celle-ci ne soit plus négligeable vis-à-vis de l'impédance de la céramique à la résonance. Cette correction est facile. Soit E la f.é.m. de la source et $r$ sa résistance, et $R$ la résistance permettant de mesurer le courant $i$; à la résonance l'impédance de la céramique est en général sensiblement égale à $\rho$. On a

$$E = (\rho + r + R)i \qquad \text{et} \qquad V = Ri,$$

$V$ étant la réponse du voltmètre électronique. Si $V_{cc}$ est la réponse lorsque la céramique est court-circuitée, on a

$$\frac{1}{V} = (\rho + r + R)\frac{1}{RE} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{V_{cc}} = (r + R)\frac{1}{RE},$$

d'où

$$\rho = RE\left(\frac{1}{V} - \frac{1}{V_{cc}}\right).$$

On obtiendra donc $\rho$ si l'on a pris soin de mesurer $V_{cc}$ et connaissant les valeurs de $R$ et $E$.

Indiquons maintenant comment on peut déduire des mesures faites les éléments du circuit équivalent. Les pulsations de résonance et d'antirésonance $\omega_R$ et $\omega_A$ sont liées à ces éléments par les relations

$$\omega_R\lambda - \frac{1}{\gamma\omega_R} = 0, \qquad \omega_A\lambda - \frac{1}{\omega_A}\left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{C}\right) = 0.$$

Des amplitudes à la résonance et à l'antirésonance nous déduisons aisément les impédances $Z_R$ et $Z_A$ à la résonance et à l'antirésonance, qui sont d'ailleurs des résistances pures : on a en effet sensiblement, en tenant compte de ce que $\rho C\omega$ est en général petit devant l'unité au voisinage de la résonance

$$Z_R = \rho, \qquad Z_A = \frac{1}{\rho C^2\omega_A^2}.$$

Soit $\Delta\omega$ l'écart entre les pulsations à l'antirésonance et à la résonance. On en déduit aisément, avec $\omega_R \neq \omega_A$,

$$C = \frac{1}{\omega_A\sqrt{Z_A Z_R}}, \qquad \lambda = \frac{\sqrt{Z_A Z_R}}{2\,\Delta\omega}, \qquad \gamma = \frac{2\,\Delta\omega}{\omega_R^2\sqrt{Z_A Z_R}}.$$

C'est surtout cette deuxième méthode que nous avons utilisée. Nous ne donnerons pas uniquement

les résultats concernant les éléments du circuit équivalent, qui n'ont pas une grande signification physique. Au contraire des quantités comme $\omega_R$ ou $\Delta\omega$ s'interprètent aisément et sont directement liées aux grandeurs physiques responsables de l'électrostriction; nous les envisagerons tout particulièrement. Une autre grandeur retiendra notre attention : le coefficient de surtension $Q$ de la céramique, qui est la grandeur fondamentale pour l'utilisation. Par définition, on a

$$Q = \frac{r}{\rho\gamma\omega_R} = \frac{\lambda\omega_R}{\rho}.$$

Compte tenu des relations précédentes on obtient finalement :

$$Q = \sqrt{\frac{Z_A}{Z_R}}\,\frac{\omega_R}{2\,\Delta\omega} \quad (^1).$$

Les deux facteurs essentiels susceptibles de faire varier les éléments du circuit équivalent sont le champ électrique statique appliqué et la température. Nous allons étudier ces influences : l'influence du champ sera étudiée à la température ambiante, tandis que l'influence de la température sera étudiée sous un champ constant assez élevé pour que les diverses grandeurs ne varient plus sensiblement avec le champ. Un autre facteur paraît intéressant : l'amplitude de la tension alternative appliquée à l'échantillon. En effet, ce facteur détermine l'amplitude des vibrations qui prennent naissance dans la céramique et qui correspondent à des vibrations de parois de domaines ou à des changements plus ou moins réversibles de directions de polarisation spontanée ou encore à des déformations provoquées par la polarisation induite. Il est certain que ces vibrations, lorsque leur amplitude varie, peuvent présenter un plus ou moins grand caractère d'anharmonicité et une plus ou moins grande réversibilité, avec plus ou moins d'hystérésis. Nous n'avons opéré pour le moment qu'en appliquant des tensions H. F. ne dépassant pas 2 Veff./cm; jusqu'à cette valeur l'amplitude de la tension H. F. n'a pas d'influence notable sur les fréquences de résonance et d'antirésonance, et les pertes ne produisent pas encore d'échauffement notable risquant de perturber la mesure. En liaison avec ces effets, signalons que la réponse de la céramique à la tension H. F. sinusoïdale n'est pas toujours sinusoïdale : elle est sensiblement sinusoïdale à la résonance, mais pas à l'antirésonance; cela résulte de l'existence d'harmoniques dans la tension H. F. appliquée; ceux-ci se trouvent renforcés dans le courant obtenu à l'antirésonance et une correction est nécessaire.

(1) Lorsqu'on n'a plus $\rho C\omega_R \ll 1$, si l'on fait intervenir les modules de $Z_R$ et $Z_A$ (qui sont effectivement les quantités mesurées), les formules donnant $C_\gamma$, $\lambda$ et $\gamma$ restent valables, tandis que les formules donnant $Z_R$ et $Z_A$ et la formule finale donnant $Q$ sont à corriger, mais la correction n'est importante que lorsque $\frac{|Z_A|}{|Z_R|}$ qui vaut $1 + \frac{1}{\rho^2 C^2 \omega^2}$ se rapproche nettement de l'unité; par exemple, pour $\rho C\omega_R = 1$, $\rho$ vaut $|Z_R|\sqrt{2}$ et la formule de $Q$ donne une valeur $\sqrt{2}$ fois trop forte.

**Variations des fréquences de résonance et d'antirésonance en fonction du champ électrique.** — Les mesures ont été faites à la température ambiante; nous représenterons les résultats obtenus pour une céramique dont le diamètre était de 9,9 mm et l'épaisseur de 2,5 mm. La figure 5 représente simultanément les variations des deux fréquences, tandis que la figure 6 représente la variation de l'écart entre ces fréquences. Sur ces courbes, comme sur celles qui suivront l'hystérésis se manifeste.

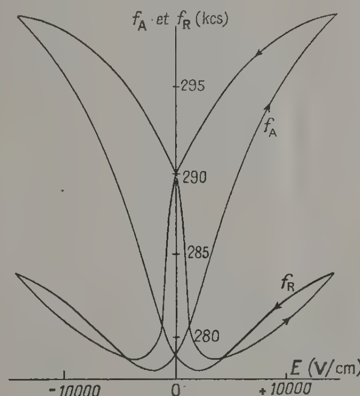


Fig. 5.

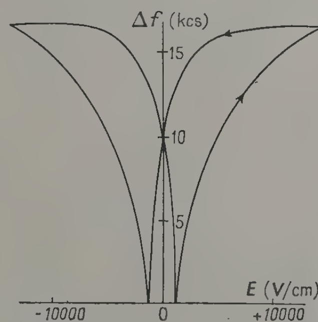


Fig. 6.

Les résultats essentiels sont qualitativement les suivants. En ce qui concerne l'hystérésis on observe l'existence d'un champ coercitif dont la valeur dépend de l'amplitude des variations du champ continu appliqué (il augmente avec cette amplitude tant que celle-ci n'est pas très élevée). Si l'on raisonne sur le déplacement électrique, on n'a plus le dédoublement dû à l'hystérésis. Quand le déplacement

croît, la fréquence de résonance commence par décroître, puis elle augmente régulièrement. La fréquence d'antirésonance croît constamment avec le déplacement électrique. Quand le champ électrique augmente à partir du champ coercitif, la différence des fréquences augmente d'abord très vite puis de plus en plus lentement jusqu'à une quasi-saturation. Il ne faut pas perdre de vue, dans l'interprétation des résultats, que le déplacement électrique, lorsque le champ électrique augmente à partir du champ coercitif, croît lui-même à partir de zéro d'abord très vite puis de plus en plus lentement. On voit alors apparaître la corrélation entre la polarisation diélectrique et les effets électromécaniques; nous ne pouvons toutefois rien préjuger de ce qui se passerait pour des champs continus plus élevés. La fréquence d'antirésonance est toujours plus élevée que la fréquence de résonance : elles se confondent lorsque le déplacement électrique est nul; les résonances tendent alors à disparaître. Au champ coercitif, lorsque la polarisation est nulle, ainsi que le déplacement électrique (à très peu près), il n'y a plus de résonance.

De telles mesures ont déjà été faites par Mason, mais il n'a pas observé le double sens de variation de la fréquence de résonance en fonction du déplacement électrique lorsque celui-ci augmente à partir de zéro et il indique pour les fréquences de résonance et d'antirésonance un minimum commun pour la valeur du champ coercitif. Nos résultats sont nettement différents et le fait qu'il appliquait des champs continus variant plus largement ne paraît pas suffisant pour expliquer les différences. Nous avons fait des mesures pour diverses céramiques : l'amplitude de la décroissance initiale de la fréquence de résonance et la valeur du champ électrique à partir duquel la variation change de sens dépendent de l'échantillon.

**Interprétation des résultats**. — La signification physique de ces résultats résulte du calcul de l'impédance de la céramique à partir de la théorie générale de l'électrostriction et des résonances que nous avons indiquée plus haut. Un calcul simplifié, qui ne tient pas compte de l'amortissement (c'est-à-dire qui néglige $\rho$), a été fait par Mason. Il nous permet d'interpréter nos résultats sur la résonance radiale, en ce qui concerne les fréquences de résonance et d'antirésonance.

Ce calcul montre d'abord sans difficulté que la résonance doit disparaître lorsque le déplacement électrique est nul, ou lorsque la polarisation macroscopique est nulle (en assimilant ces deux choses, nous négligeons la contribution directe du champ appliqué au déplacement électrique. Cela résulte de ce que l'électrostriction est un phénomène quadratique négligeable pour un déplacement électrique voisin de zéro, c'est-à-dire lorsqu'il n'y a pas un déplacement électrique moyen différent de zéro.

Dans les limites de validité de la théorie générale de l'électrostriction des céramiques au titanate de baryum, le calcul de Mason conduit à l'expression suivante de la fréquence de résonance

$$f_R = \frac{2,03}{2\pi a}\sqrt{\frac{Y}{\rho(1-\sigma^2)}},$$

en admettant un coefficient de Poisson $\sigma$ voisin de 0,27; $\rho$ est ici la densité, $Y$ le module d'Young et $a$ le rayon de la céramique. Les variations de la fréquence de résonance s'interprètent donc à partir des propriétés élastiques sur lesquelles nous obtenons ainsi des renseignements. Ce qui explique les variations observées en fonction du champ, ce sont essentiellement les variations du module d'Young mesuré à champ constant. La signification ainsi obtenue est donc très simple; elle ne fait pas intervenir directement l'électrostriction et ses variations avec le champ appliqué, mais cela nous renseigne sur des facteurs qui interviennent dans les propriétés mécaniques et qui sont influencés par l'état électrique et précise par suite les propriétés électromécaniques.

Ainsi le module d'Young, mesuré à champ constant, diminue d'abord quand la polarisation électrique augmente, puis il augmente avec cette polarisation qui tend d'ailleurs vers une saturation. La relation entre les variations du module d'Young et de la polarisation apporte d'intéressantes précisions sur la théorie des domaines ferroélectriques. Il est intéressant de remarquer que le module d'Young ne tend pas vers une valeur constante dès que la polarisation devient à peu près stable. Si l'on remarque que les déformations mécaniques ont d'autant plus d'ampleur que le module d'Young est plus petit, on doit conclure que, plus le champ électrique appliqué est élevé, plus les déformations provoquées par des tensions mécaniques sont faibles. C'est que le champ, en orientant de plus en plus fortement la polarisation, gêne de plus en plus les déformations mécaniques qui tendent à faire varier aussi la polarisation. Et si, au contraire, pour les champs peu élevés, une augmentation du champ provoque une diminution du module d'Young, c'est que les déformations mécaniques sont facilitées, lorsque les domaines commencent à s'orienter préférentiellement dans un même sens. Pour obtenir les coefficients élastiques de Lamé il faudrait aussi étudier une autre résonance que la résonance radiale.

Mason a obtenu pour le module d'Young à la température ambiante une valeur de l'ordre de $1,15.10^{12}$ dynes/cm². Pour nos céramiques nous trouvons une valeur identique à quelques pour-cent près. On a d'ailleurs vérifié que la fréquence de résonance était inversement proportionnelle au rayon de la céramique en opérant sur des céramiques de diverses dimensions en diamètre et en épaisseur, celle-ci étant toujours faible par rapport au diamètre.

L'écart entre les fréquences d'antirésonance et de

résonance donne immédiatement un autre résultat très important, à savoir le facteur de couplage électromécanique $k$ : celui-ci est défini comme étant la racine carrée du rapport entre l'énergie obtenue sous forme mécanique et l'énergie électrique totale fournie, à la fréquence zéro. Mason a montré que pour une céramique au titanate de baryum on avait sensiblement

$$k^2 = 2,5 \frac{\Delta f}{f_R}.$$

En fonction du champ électrique appliqué, $k$ varie donc en gros comme la racine carrée de l'écart des fréquences. Nous avons représenté sur la figure 7

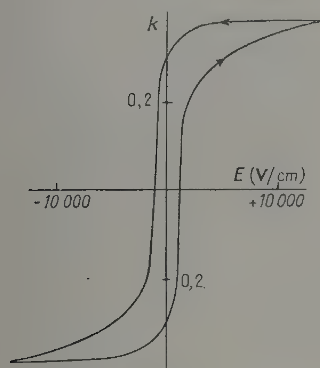



Fig. 7.

la variation de $k$ en fonction du champ électrique statique appliqué. On obtient un cycle d'hystérésis; le coefficient de couplage est nul au champ coercitif; il tend vers une saturation lorsque le champ devient élevé. On obtient aisément des valeurs de $k$ dépassant 0,35; ces valeurs correspondent à un excellent couplage car la théorie montre que l'on ne peut dépasser sensiblement cette valeur pour le cas des résonances radiales. Les valeurs indiquées par Mason ne dépassent pas 0,3.

Le coefficient $k$ est intéressant en ce qui concerne l'amplitude des déformations que l'on obtient; on peut la déterminer aisément dans diverses conditions en faisant intervenir $k$, grâce aux formules de Mason. Par exemple à une basse fréquence donnée et pour une céramique libre de se déformer, l'amplitude est proportionnelle à $k$ pour une énergie électrique donnée; si l'on opère avec un champ alternatif d'amplitude constante autour d'un champ continu, lorsque ce champ continu s'élève à partir du champ coercitif l'énergie électrique nécessaire diminue car le déplacement électrique varie de moins en moins et, par suite, l'amplitude des vibrations tend à diminuer dans le même rapport, mais par ailleurs elle tend à augmenter du fait de l'augmentation de $k$, à la variation de $Y$ et $\sigma$ près.

**Variations des impédances à la résonance et à l'antirésonance en fonction du champ électrique.** — La figure 8 représente les variations de l'impédance à la résonance et la figure 9 les variations de l'impédance à l'antirésonance à un même facteur près pour la même céramique que ci-dessus : ce facteur vaut environ 3 000 Ω. Les variations sont surtout importantes au voisinage du champ coercitif où les deux impédances viennent se confondre. L'impédance à l'antirésonance croît

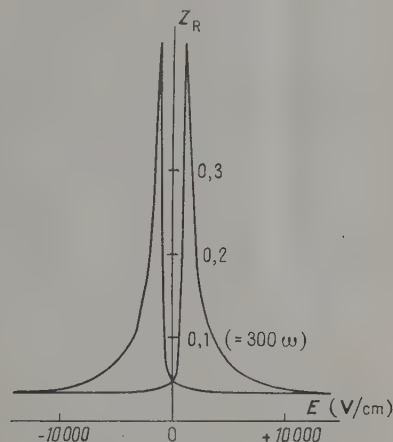



Fig. 8.

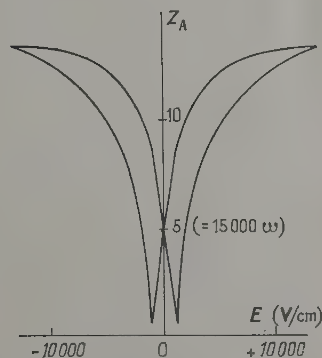



Fig. 9.

avec le champ électrique (au-delà du champ coercitif) jusqu'à une certaine saturation; l'impédance à la résonance diminue dans les mêmes conditions jusqu'à une valeur quasi stationnaire; il semble toutefois que pour les champs électriques élevés elle augmente légèrement. Ces saturations rappellent celle de la polarisation diélectrique qui n'augmente plus que lentement aux champs élevés.

Ces impédances font intervenir la résistance $\rho$ du circuit équivalent. La théorie déterminant l'origine de cette résistance n'a pas été faite. On introduit une telle résistance si l'on tient compte

d'un terme de frottement dans l'équation de propagation des vibrations à travers la céramique. Un tel terme existe certainement, mais l'origine de $\rho$ nous paraît devoir être cherchée surtout dans l'existence de l'hystérésis qui entraîne un amortissement; dans ces conditions une expression mathématique peut difficilement être déterminée. Les pertes de la céramique interviennent aussi, mais précisément ces pertes sont liées essentiellement à l'existence de l'hystérésis. Les essais purement diélectriques montrent que les pertes diminuent lorsque le déplacement électrique statique, auquel se superpose le faible déplacement alternatif, augmente, à condition qu'il ne prenne pas des valeurs trop élevées dues à un champ électrique intense. Ce résultat est bien en accord avec ce que nous trouvons pour l'impédance à la résonance, qui est égale à $\rho$ en général.

De ces résultats on peut déduire tous les éléments du circuit équivalent en fonction du champ électrique appliqué, compte tenu des relations indiquées plus haut. La figure 8 donnait les variations de $\rho$, sauf au voisinage immédiat du champ coercitif. On a représenté sur les figures 10, 11 et 12 les variations de $C$, $\gamma$ et $\lambda$ respectivement. En ce qui concerne $C$ les variations sont relativement peu considérables; on peut trouver d'abord une augmentation, mais on obtient essentiellement une décroissance lorsque le déplacement électrique augmente; les méthodes directes de mesure de $C$ à basse fréquence donnent toutefois des résultats plus précis que ceux que nous obtenons ici; elles donnent bien une évolution du même genre; cependant des différences peuvent s'expliquer par le fait que la céramique, lorsqu'elle est libre de vibrer, n'est jamais rigoureusement équivalente à une capacité pure à cause des divers modes possibles de vibration, et la capacité « apparente » dépend de la fréquence. Pour les autres éléments les variations sont surtout importantes au voisinage du champ coercitif; dès que le champ électrique est assez élevé on a une valeur relativement stable.

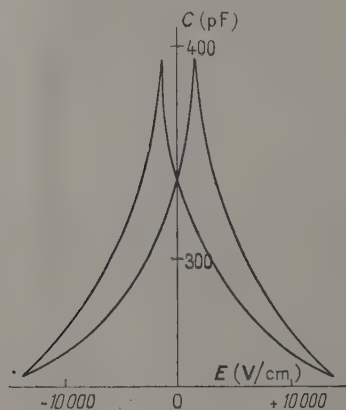


Fig. 10.

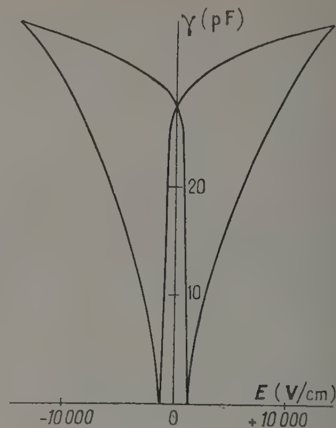


Fig. 11.

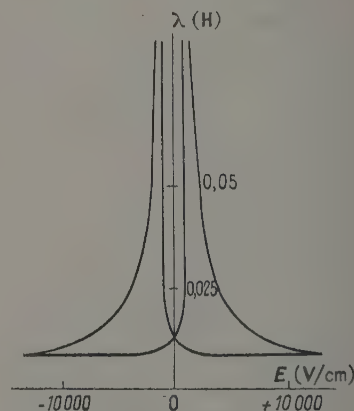


Fig. 12.

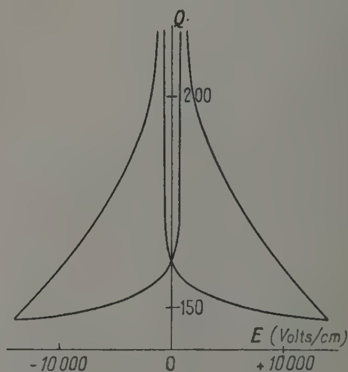


Fig. 13.

Nous avons enfin représenté sur la figure 13 les variations du coefficient de surtension $Q$. Celui-ci diminue lorsqu'on s'éloigne du champ coercitif

pour atteindre une valeur assez stable, de l'ordre de 150. Nous avons pu obtenir sur certains échantillons des valeurs de $Q$ dépassant 300 [2]. De toutes façons ces valeurs sont nettement inférieures à celles que l'on rencontre dans les quartz. On ne peut pratiquement profiter des valeurs élevées obtenues au voisinage du champ coercitif car le fonctionnement ne serait pas très stable et le coefficient de couplage électromécanique devient très faible. Mais on ne gagne rien à augmenter beaucoup le champ électrique appliqué; en particulier on opère dans des conditions sensiblement aussi bonnes sur la rémanence.

**Variations des fréquences de résonance et d'antirésonance en fonction de la température.** — Les mesures ont été faites sous un champ constant, de l'ordre de 10 000 V/cm, suffisant pour que l'on soit dans la zone de quasi-saturation de la polarisation et de celles des grandeurs que nous venons d'étudier qui présentent le mieux cette quasi-saturation. La figure 14 donne les résultats obtenus en

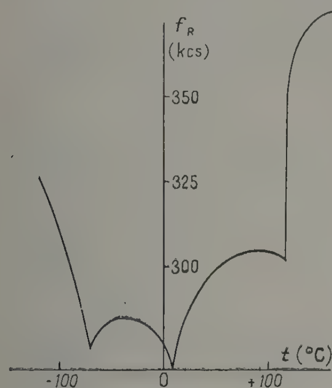



Fig. 14.

ce qui concerne la variation de la fréquence de résonance entre — 150 et + 150° C. La courbe comprend plusieurs parties séparées par des points anguleux qui correspondent à des minima de la fréquence de résonance. Mais en outre pour le point anguleux correspondant à la température la plus élevée, la fréquence de résonance croît très rapidement et de façon quasi discontinue lorsque la température augmente à partir de ce point, puis la croissance est plus lente et enfin la résonance disparaît progressivement.

On interprétera ces résultats en tenant compte de l'existence de transitions du titanate lorsque la température varie. On sait qu'au-dessus du point de Curie (120° C) le titanate de baryum a une structure cubique et n'est plus ferroélectrique. Au-dessous de 120° il est ferroélectrique, sa structure étant d'abord tétragonale; il en est ainsi à la température ambiante. Mais si l'on abaisse encore la température, on obtient à 10°C une transition conduisant à une nouvelle structure, orthorhombique, le titanate étant encore ferroélectrique. Enfin, en abaissant encore la température on obtient une nouvelle transition à — 70°C; la nouvelle structure est trigonale, et le titanate est encore ferroélectrique. Sans entrer dans le détail des différentes structures et des propriétés générales correspondantes, on comprend pourquoi la courbe se compose de quatre parties bien distinctes.

Compte tenu de l'interprétation de la fréquence de résonance en liaison avec les propriétés élastiques, on doit considérer que les variations de cette fréquence reflètent les variations du module d'Young essentiellement. Il est normal d'obtenir un module d'Young passant par un minimum au voisinage des transitions, si l'on se rappelle que les déformations élastiques sont d'autant plus accentuées que le module d'Young est plus petit; en effet au voisinage des transitions de structure la déformabilité sous l'action d'une tension mécanique doit être plus grande.

Des résultats analogues ont été obtenus par Mason qui n'a toutefois pas indiqué les résultats obtenus au voisinage du point de Curie. Blattner, Känzig et Merz [6] ont fait des mesures pour des monocristaux de titanate; ils ont obtenu des résultats analogues; toutefois les mesures semblent avoir été limitées au point de Curie car la brusque croissance obtenue lorsque la température dépasse celle qui correspond à la transition quadratique-cubique n'a pas été signalée; au contraire ils ont observé lorsque la température se rapproche du point de Curie par valeurs croissantes une diminution relativement importante de la fréquence de résonance.

Revenons sur cette dernière transition. On ne devrait pas normalement obtenir de résonance appréciable au-dessus du point de Curie car l'électrostriction doit prendre une valeur très faible comparable à celle de tous les corps. Il est certain que la résonance est très peu aiguë avant de disparaître complètement de façon progressive; toutefois la présence de cette résonance est un résultat intéressant; c'est peut-être qu'à une température dépassant assez peu le point de Curie, le titanate, bien que cubique, présente une électrostriction relativement forte, de même que la polarisation diélectrique induite est relativement grande. On ne peut expliquer les résultats en admettant que la disparition de la ferroélectricité est progressive, car on n'expliquerait pas la brusque augmentation de la fréquence de résonance qui se produit au point de Curie (ou peut-être à une température légèrement inférieure); celle-ci ne peut être due qu'à un brusque changement de structure et à l'apparition d'une structure tout à fait nouvelle (non ferroélectrique) car

[2] $Q$ varie légèrement avec la température de frittage.

pour les autres transitions il n'y a pas de discontinuité. On sait que l'on n'a pu encore conclure de façon certaine en ce qui concerne la nature de la transition qui se produit au point de Curie : transition du premier ordre, du second ordre, ou d'un autre type. Il est certain que la brusque augmentation de la fréquence de résonance que nous avons observée renforce l'idée suivant laquelle il s'agirait d'une transition du premier ordre, mais il faut tenir compte surtout des résultats de mesures purement thermiques. Ceux-ci semblent indiquer l'absence aussi bien de chaleur latente que de discontinuité de chaleur spécifique : il y aurait seulement autour du point de Curie une chaleur spécifique plus élevée que celle que l'on obtient nettement au-dessus ou au-dessous du point de Curie.

La fréquence d'antirésonance varie en gros en fonction de la température comme la fréquence de résonance. En particulier les transitions se voient encore nettement, avec une évolution analogue autour des points de transition. La différence entre les fréquences d'antirésonance et de résonance varie en fonction de la température conformément à la figure 15. On voit que quand la température

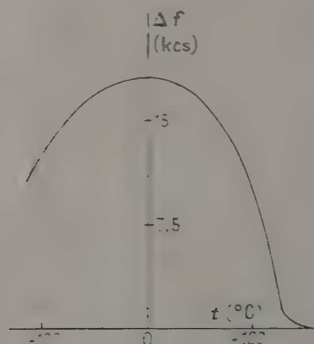


Fig. 15.

s'élève cette différence augmente d'abord puis reste assez stable; au-dessus de la température ambiante, une décroissance progressive commence à se manifester; elle devient très rapide lorsqu'on arrive au point de Curie; la différence est alors très faible et tendra vers zéro au fur et à mesure que la résonance s'estompera. Pour les deux transitions distinctes du point de Curie on n'observe rien de net en ce qui concerne une variation éventuelle de l'écart des fréquences.

On a vu que les données expérimentales qui précèdent permettaient de calculer le coefficient de couplage électromécanique $k$, dont le carré varie sensiblement comme l'écart des fréquences d'antirésonance et de résonance. La figure 16 représente les variations de $k$. Précisons que toutes ces mesures étaient effectuées sur une céramique distincte de celle dont nous avons représenté le comportement à température constante; pour la température ambiante nous retrouvons cependant ici des valeurs tout à fait analogues; le diamètre de la céramique était sensiblement le même. On remarquera surtout la diminution de $k$ lorsque la température s'élève au-dessus de la température ambiante; il faut y voir essentiellement les effets de l'agitation thermique. La diminution obtenue lorsqu'on va vers les très basses températures correspond au contraire au fait que les déplacements mécaniques sont de

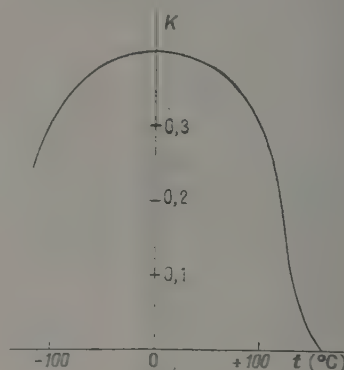


Fig. 16.

plus en plus difficiles dans la céramique qui se fige de plus en plus; peut-être réussirait-on à obtenir un bon coefficient de couplage avec un champ électrique statique plus élevé nécessité par une hystérésis accrue. Ainsi les températures trop fortes ou trop faibles sont également nuisibles pour une bonne utilisation des propriétés électromécaniques, en présence d'un champ continu; si l'on opère sur la rémanence, le résultat ne semble pas sensiblement différent, si ce n'est que les températures élevées sont encore plus défavorables.

**Variations des impédances à la résonance et à l'antirésonance en fonction de la température.** — Nous avons représenté sur la figure 17 les variations de l'impédance à la résonance et sur la figure 18 les variations de l'impédance à l'antirésonance. L'impédance à la résonance présente un minimum dans la zone entourant la température ambiante; aux températures élevées l'augmentation est rapide, mais on remarque qu'elle ne devient grande qu'au-delà du point de Curie. Il convient de relier cette variation de $\rho$ à la variation des pertes diélectriques de la céramique en fonction de la température : lorsque la température croît à partir de — 150° C, les pertes diminuent d'abord, comme $\rho$; lorsqu'on s'approche du point de Curie elles augmentent rapidement, comme $\rho$ (il s'agit des pertes sous champ continu de polarisation lorsqu'on ajoute une tension alternative; elles sont différentes des pertes autour d'une valeur nulle du

champ). Nous n'avons pas noté d'évolution importante de l'impédance vers les deux transitions distinctes du point de Curie. L'impédance à l'antirésonance varie différemment : elle diminue quand la température s'élève, sauf aux basses températures où le sens de variation est changeant à cause des transitions. Au-delà du point de Curie, les deux impédances se rejoignent.

Les valeurs des impédances à la résonance et à l'antirésonance, comme les valeurs des éléments du circuit équivalent que nous indiquerons, dépendent des dimensions de la céramique. Nous préciserons donc que tous nos résultats indiqués en fonction de la température sont ceux que nous avons obtenus avec une céramique de 1,7 mm d'épaisseur et 9,9 mm de diamètre, sous un champ de 7 500 V/cm.

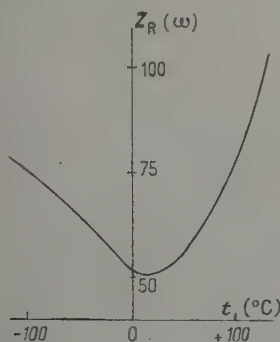



Fig. 17.

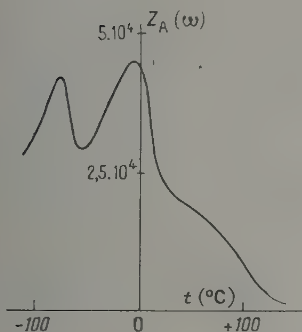



Fig. 18.

A partir de ces résultats on peut déterminer les variations de $C$, $\gamma$ et $\lambda$ avec la température. Les figures 19, 20 et 21 donnent les courbes obtenues. En toute rigueur les points de transition se manifestent sur ces courbes, mais nous n'avons représenté que les variations essentielles. En ce qui concerne $C$ on trouve un maximum au point de Curie comme on devait s'y attendre d'après les résultats connus des mesures diélectriques; ce maximum est un peu moins aigu, mais cela est normal en présence d'un champ continu superposé au champ alternatif de mesure; de même les variations habituellement observées pour la capacité de la céramique au voisinage des autres transitions sont atténuées en présence d'un champ continu.

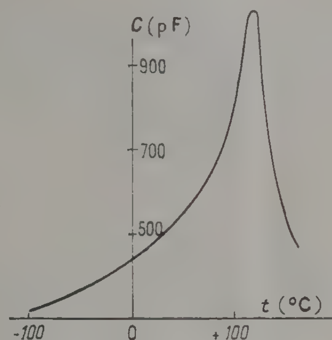



Fig. 19.

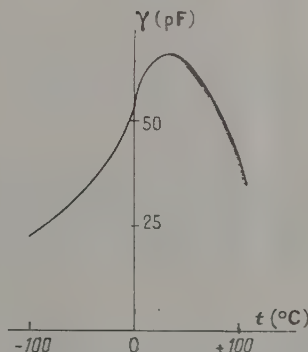



Fig. 20.

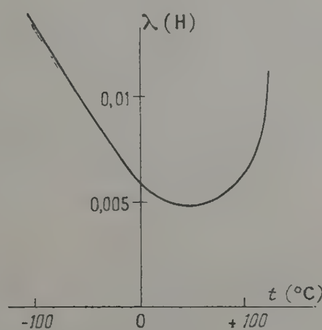



Fig. 21.

On a enfin représenté sur la figure 22 les variations du coefficient de surtension $Q$. Quand la température s'élève, $Q$ diminue d'abord; lorsqu'on s'approche du point de Curie, $Q$ augmente très rapidement et continue à augmenter au-delà du point de Curie. Il semble donc que l'on ait intérêt à utiliser la céra-

mique à des températures aussi basses où élevées que possible, mais on remarquera que $k$ diminue alors rapidement. On remarque d'ailleurs que $Q$ varie sensiblement toujours en sens inverse de $k$ lorsque la température varie; il en était de même en fonction du champ électrique. Un tel résultat est regrettable car il serait bon de pouvoir profiter simultanément de valeurs élevées de $k$ et $Q$ qui sont les deux quantités les plus intéressantes à connaître. Le résultat est assez normal si l'on considère que le transfert d'énergie électrique en énergie mécanique ne peut avoir lieu sans frottement ou hystérésis : dans ces conditions le transfert sera le meilleur lorsque le frottement ou l'hystérésis se manifesteront davantage, mais c'est alors que $Q$ diminue.

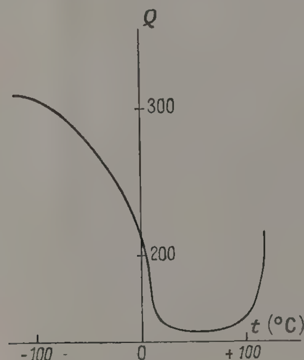


Fig. 22.

**Conclusion.** — L'étude qui précède nous a permis de préciser quelques propriétés élastiques, électrostrictives et diélectriques des céramiques au titanate de baryum; les résultats obtenus apportent des éléments utiles sur la ferroélectricité du titanate. Mais la méthode des résonances qui a été utilisée nous donne des indications directement applicables pour l'utilisation des propriétés électromécaniques des céramiques. Nous avons vu les conditions de polarisation par un champ continu à remplir à la température ambiante pour obtenu une valeur élevée de $k$ ou de $Q$, et de même les conditions de température permettant à champ donné assez élevé d'obtenir les meilleurs valeurs de $k$ ou de $Q$. Étant donné que les conditions à remplir ne sont pas les mêmes pour $k$ et $Q$, la nature de l'application envisagée intervient dans la détermination des conditions optima : si l'on veut utiliser simplement la céramique comme résonateur, c'est $Q$ qui est essentiel; si l'on veut l'utiliser comme transducteur et recueillir de l'énergie mécanique à partir d'énergie électrique, c'est $k$ qui est essentiel. Il est certainement incommode d'utiliser la céramique à une température différente de la température ambiante, mais si l'on remarque que certaines additions au titanate produisent des variations de propriétés équivalant à un décalage de la température, on comprend qu'il était bon d'étudier l'influence de la température sur les propriétés des céramiques au titanate pur. La température ambiante est une assez bonne température d'utilisation pour le titanate pur ($k$ est élevé) mais des températures un peu inférieures sont préférables (la région où la structure est orthorhombique est la meilleure) à cause de $Q$ qui, par ailleurs, ne pourrait être nettement augmenté qu'en se rapprochant du point de Curie, ce qui nuirait à la stabilité. Cette qualité de stabilité exige notamment que l'on opère dans une zone de température où les propriétés ne varient pas trop vite avec la température. On a vu par ailleurs qu'à la température ambiante on pouvait opérer sur la rémanence dans des conditions convenables en ce qui concerne $k$ et $Q$; toutefois la stabilité n'est pas excellente car le champ coercitif est faible et c'est essentiellement ce champ coercitif que l'on doit essayer d'augmenter par des additions.

Nous remercions de leur appui M. le Professeur G. Déjardin, Directeur de l'Institut de Physique Générale de l'Université de Lyon et M. le Professeur R. Bernard.

Manuscrit reçu le 3 mai 1955.

Modifié le 20 juillet 1955.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] *Voir* par exemple von Hippel A. — *Rev. Mod. Phys.*, 1950, **22**, 221-237.
[2] Shepard Roberts. — *Phys. Rev.*, 1947, **71**, 890-895.
[3] Mason W. P. — *Phys. Rev.*, 1948, **74**, 1134-1147.
Mason W. P. — Piezoelectric crystals and their application to Ultrasonics, Van Nostrand, New York, 1954, chap. XII.
[4] Megaw H. D. — *Proc. Roy. Soc.*, 1947, **189**, 261-283.
[4'] Caspari M. E. et Merz W. J. — *Phys. Rev.*, 1950, **80**, 1082-1089.
[5] Mason W. P. et Hans Jaffe. — *Proc. I.R.E.*, 1954, **42**, 921-930.
[6] Blattner H., Känsig W. et Merz W. — *Helv. Phys. Acta*, 1949, **22**, 35-65.

# LETTRES A LA RÉDACTION

---

## SUR UN SPECTROGRAPHE BETA A SCINTILLATIONS A POUVOIR DE RÉSOLUTION AMÉLIORÉ

Par MM. Serge Gorodetzky, Raymond Armbruster, Pierre Chevallier et André Gallmann,

Institut de Recherches Nucléaires, Strasbourg

Au cours de publications récentes [1], [2], nous avons décrit un dispositif permettant, en plus de la mesure de la corrélation angulaire des paires, de déterminer, pour chaque événement, l'énergie totale de la paire (par addition des énergies des électrons positifs et négatifs) et aussi l'énergie de chacun des électrons. Dans la référence [1] on indiquait en particulier pour la raie monopolaire de paire de $^{16}O$ (passage du niveau excité 6,05 MeV $0^+$ au niveau fondamental $0^+$) une résolution de 14 pour 100. Cette résolution était déjà considérée comme assez bonne étant donné qu'il s'agissait non pas de photons, mais d'électrons tombant sur un cristal d'anthracène. Il faut bien remarquer que cette raie se rapporte à la somme des énergies de deux électrons. Si l'on considère une raie due, non pas à des paires d'électrons, mais à une conversion interne pure et simple donnant un seul électron, la résolution est évidemment un peu meilleure.

Ainsi nous avions étudié la raie d'électrons de conversion interne de 662 keV du $^{137}Cs$ et obtenu alors une résolution de 12 pour 100. Ce résultat est à comparer avec celui de C. J. Taylor et ses collaborateurs [3], qui obtiennent également un pouvoir de résolution de 12 pour 100 dans des conditions analogues.

Depuis nous avons essayé d'améliorer cette résolution. Ceci a, en effet, la plus grande importance au point de vue de l'application de l'appareil à l'étude des niveaux excités.

Nous avons finalement réussi à abaisser le pouvoir de résolution à la valeur de 9 pour 100 (toujours pour la raie de conversion de 662 keV du $^{137}Cs$). Ce que l'on obtient ainsi peut être comparé à la résolution obtenue pour un rayonnement $\gamma$ tombant sur un cristal d'iodure de sodium. On ne peut guère espérer améliorer beaucoup la valeur obtenue.

Nous avons utilisé une source de $^{137}Cs$ de 10 microcuries, de surface active de 2 mm² montée sur un support de mica de 2,1 mg/cm². Nous avons en premier lieu étudié les réponses comparatives de différents cristaux : anthracène, stilbène, iodure de sodium et plastique. Ces cristaux ont été montés successivement sur un photomultiplicateur 6342 R. C. A.

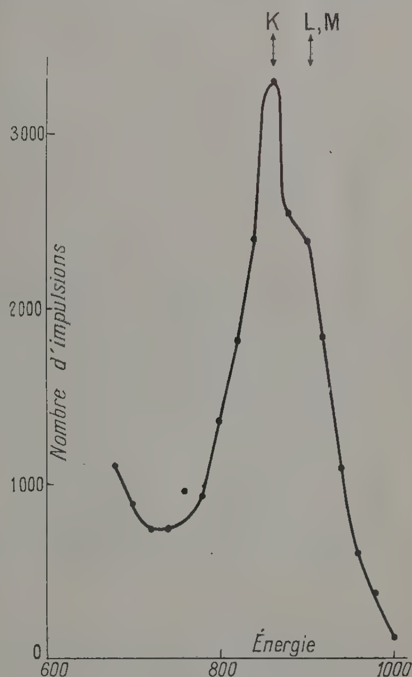



Fig. — Raies de conversion du $^{137}Cs$.

Nos résultats sont résumés dans le tableau ci-contre :

| Échantillon. | Épaisseur. (mm). | Hauteur d'impulsion relative. | Résolution spectrale (pour 100). |
|---|---|---|---|
| Anthracène .......... | 3 | 100 | 12 |
| Stilbène ............ | 3 | 60 | 23 |
| NaI.................. | 2 | 200 | 19,5 |
| NaI.................. | 1 | 200 | 30 |
| Plastique............ | 4 | 25 | Pas de raie observable |

Les cristaux de NaI présentent la plus grande luminosité mais ont un mauvais pouvoir de résolution : ceci est dû surtout au « backscattering ».

Le cristal d'anthracène est le plus apte à donner un bon pouvoir de résolution et possède, en outre, l'avantage de répondre par des impulsions lumineuses ayant un temps de montée relativement faible (environ $10^{-8}$ s).

La luminosité des scintillants plastiques est trop faible pour qu'ils puissent servir, avec efficacité, comme détecteurs de rayonnements $\beta$ de faible énergie.

Le cristal de stilbène possède un pouvoir de résolution moyen, mais la montée de son impulsion (environ $5.10^{-9}$ s) permet de l'utiliser dans des circuits à coïncidences rapides.

Notre spectrographe ayant pour but la détection d'électrons de paires provenant de la désexcitation de niveaux excités, nous avons dû utiliser un conduit de lumière de plexiglass pour adapter la forme du cristal de détection à celle de la photocathode du photomultiplicateur. Ce conduit de lumière a contribué à améliorer le pouvoir de résolution en diffusant uniformément la lumière émise par chaque scintillation sur l'ensemble de la photocathode. Les imperfections locales du revêtement photosensible de la photocathode sont ainsi [illegible].

Le cristal d'anthracène, le plexiglass et le photomultiplicateur ont été soudés entre eux par de l'acétate de polyvinyle (Gelva). Le cristal et le plexiglass ont été entièrement recouverts d'une couche [illegible] d'oxyde de magnésium. Le pouvoir de résolution [illegible] fait apparaître la raie L des électrons de conversion dans l'aile de la raie K.

Manuscrit reçu le 14 octobre 19[illegible].


[1] GORODETZKY S., ARMBRUSTER R., CHEVALLIER P., GALLMANN A. et MANQUENOUILLE R. — C. R. Acad. Sc., 1955, **241**, 482.

[2] GORODETZKY S., ARMBRUSTER R., CHEVALLIER P., GALLMANN A. et MANQUENOUILLE R. — C. R. Acad. Sc., 1955, **241**, 695.

[3] TAYLOR C. J., JENTSCHKE W. K., REMLEY M. E., EBY F. S. et KRUGER P. G. — *Phys. Rev.*, 1951, **84**, [illegible]


# INFORMATIONS

La Société des Radioélectriciens et la Société française des Ingénieurs Techniciens du Vide organisent à Paris, du 29 mai au 2 juin 1956, dans les Amphithéâtres du Conservatoire National des Arts et Métiers, 292, rue Saint-Martin, Paris (3e), un Congrès International « Tubes hyperfréquences ».

L'objet essentiel de ce Congrès est l'examen et la discussion des résultats récemment acquis dans le domaine des tubes hyperfréquences, c'est-à-dire des fréquences supérieures à [illegible] MHz, ainsi que de certaines questions relatives aux accélérateurs de particules [illegible] fonctionnant à ces fréquences. Les sujets [illegible] sont :

1. Phénomènes fondamentaux et théories générales. 2. Lampes à grilles [illegible]. 3. Magnétrons. 4. Tubes à modulation de vitesse. 5. Tubes à onde progressive, amplificateurs et oscillateurs. 6. Tubes divers [illegible], tubes à [illegible] de charge d'espace, etc. 7. Accélérateurs linéaires. 8. Générateurs spéciaux pour ondes millimétriques et inframillimétriques. 9. Tubes à [illegible] (T. R., A. T. R., générateurs de bruit, etc.). 10. Circuits associés, cavités résonnantes, [illegible]. 11. Optique électronique. 12. Technologie. 13. Mesures.

Pour les inscriptions et tous renseignements complémentaires, s'adresser : Congrès International « Tubes hyperfréquences », S. F. I. T. V., 44, rue de Rennes, Paris [illegible].

La [illegible] réunion annuelle de la Société de Chimie Physique sera consacrée à une discussion sur le sujet suivant : Réactions superficielles des gaz sur les métaux.

Elle aura lieu à Paris, du 29 mai au 1er juin 1956.

L'objet de cette réunion est l'étude de tous les phénomènes fondamentaux qui [illegible] le développement et la structure des couches minces formées par réaction d'un gaz à la surface d'un métal. Le programme [illegible] des phénomènes d'adsorption pure et de catalyse.

Les principales questions envisagées sont les suivantes : [illegible]

Pour tous renseignements s'adresser au Secrétariat général de la Société de Chimie Physique, [illegible], rue Vauquelin, Paris [illegible].

# REVUE DES LIVRES

BERGMANN (L.), **Les ultrasons et leur utilisation dans la recherche et la technique** (1 vol. 15 × 22 cm, 1114 pages, Hirzel, Stuttgart, 1954, DM 72).

Cette nouvelle édition comporte 1114 pages, 609 figures et 5162 références. L'édition précédente qui date de 1949 n'avait que 748 pages, 460 figures et 2 322 références.

Ce livre est trop connu pour que nous en fassions une analyse complète mais il est intéressant d'étudier les modifications et additions apportées par le professeur Bergmann.

Les 290 pages de texte supplémentaires se répartissent comme suit :

Premier chapitre constitué par la physique du champ ultrasonore étendue de 10 pages. Transducteur magnétostrictif (13 p.) et piézoélectrique (44 p.). Procédés de mesure mécaniques (6 p.). Interférométrie ultrasonore (9 p.). Optique ultrasonore (15 p.). Vitesse (24 p.) et absorbtion (19 p.) des ondes acoustiques dans les liquides. Vitesse dans les gaz (7 p.). Vitesse (23 p.) et absorption (5 p.) dans les solides. Mesure de vitesse des courants gazeux (2 p.). Lignes à retard (3 p.). Contrôle non destructif (20 p.). Action des ultrasons sur les milieux dispersés et colloïdaux (10 p.). Action sur la coagulation et l'orientation des molécules (5 p.). Dégazage et cavitation (9 p.). Application des ultrasons à la métallurgie (4 p.). Action des ultrasons sur les processus électrolytiques (15 p.). Applications biologiques (31 p.) et architecturales (1 p.).

Les additions les plus importantes portent :

— sur les récents progrès du transducteur magnétostrictif;

— sur l'application des céramiques au titanate de baryum et des cristaux piézoélectriques synthétiques;

— sur la vitesse des ondes ultrasonore dans les liquides et les solides mesurée par la méthode de Bergmann-Schœfer;

— sur le contrôle non destructif des matériaux métalliques ou plastiques;

— sur l'action des ultrasons sur les électrodes, les électrolytes et les phénomènes électrocinétiques;

— sur les applications biologiques et médicales : action par agitation, dispersion, dégazage, cavitation, échauffement, oxydation, coagulation dans les organismes vivants;

— sur la bibliographie qui s'étend jusqu'au milieu de l'année 1953 et comporte plus de 5000 références.

Cette nouvelle édition est donc un Ouvrage considérable et reste plus que jamais l'outil de base des techniciens et des chercheurs qui ont à travailler sur les ultrasons.

Y. LE CORRE.

INDJOUDJIAN (D.) et ANDRIEUX (P.), **Les filtres à cristaux piézoélectriques** (1 vol. 21 × 30 cm, 180 pages, Gauthier-Villars, Paris, 1953, 3300 f).

Le but de cet Ouvrage est le suivant :

Mettre à la disposition d'un ingénieur radioélectricien familiarisé avec les quadripôles mais ignorant de la piézoélectricité tous les documents lui permettant de construire un filtre à cristaux piézoélectriques.

Après une introduction (chap. I) les auteurs rappellent quelques généralités sur les filtres (chap. II) et exposent brièvement les notions de piézoélectricité nécessaires (chap. III). Le lecteur est suffisamment armé pour attaquer successivement les filtres passe-bande étroits en treillis (chap. IV), en échelle (chap. V) ou comportant une inductance mutuelle (chap. VI) puis les filtres passe-bande élargis en treillis (chap. VII), les filtres passe-haut et passe-bas (chap. VIII) les filtres coupe-bande (chap. IX) et les déphaseurs à cristaux (chap. X).

Un nombre élevé d'annexes développant les questions d'élasticité ou de ferroélectricité ou présentant les formulaires utiles complète heureusement l'Ouvrage. Y. LE CORRE.

BECHERT (K.) et GERTHSEN (C.), **Physique de l'atome (Atomphysik).** III. (*Théorie de la structure atomique : 1re partie*); IV. (*Théorie de la structure atomique : 2e partie*) (2 vol. 10,5 × 16 cm, 148 et 170 pages, de Gruyter et Cie, Berlin, 1954, DM. 4,80).

L'excellente collection Göschen vient de s'enrichir de deux petits volumes fort intéressants consacrés à la Physique atomique.

Le premier volume (tome III) débute par un chapitre sur les relations d'incertitude. Le deuxième chapitre est consacré à l'ancienne théorie de Bohr. Le troisième chapitre a pour objet le principe de correspondance. C'est la mécanique matricielle qui est esquissée dans la quatrième partie. Puis vient un chapitre sur les analogies opticomécaniques. Viennent ensuite quelques exemples simples pour illustrer la Mécanique ondulatoire. Les deux derniers chapitres sont enfin consacrés, l'un aux relations entre le calcul opératoire, la Mécanique matricielle et la Mécanique ondulatoire, l'autre à la théorie de l'atome d'hydrogène.

Le deuxième volume (tome IV) comporte sept parties dont la première traite des atomes à deux électrons, la seconde de la théorie de perturbation de systèmes indépendants du temps ainsi que des processus de collision; la troisième, du moment cinétique des particules; la quatrième, du spin électronique en Mécanique ondulatoire, la cinquième partie ayant pour objet la théorie des molécules simples, la sixième est consacrée aux perturbations fonctions du temps, à la diffusion de la lumière et à l'effet photoélectrique. Enfin la dernière partie porte sur la théorie de l'électron de Dirac.

Cette énumération rapide suffit déjà pour donner une idée de la richesse des sujets traités par l'auteur. Ajoutons que celui-ci a le soin constant de relier de manière suggestive et incessante théorie et expérience intimement imbriquées l'une dans l'autre. Nous recommandons vivement la lecture de ce petit ouvrage fort utile surtout aux expérimentateurs qui tiennent à asseoir sur des bases modernes leur savoir et à élargir de la sorte leur horizon scientifique.

T. KAHAN.

BLANC-LAPIERRE (A.) et PERROT (M.), **Conductibilité électrique des lames métalliques minces** (1 vol. 16 × 25 cm, 96 pages, *Mémorial des Sciences Physiques*, fasc. 57, Gauthier-Villars, Paris, 1954, 1100 f).

Ce livre constitue un remarquable exposé de très abondants travaux dus à de nombreux physiciens et aux auteurs eux-mêmes. L'accent est mis sur les multiples paramètres qu'il convient de préciser afin d'assurer la reproductibilité des résultats. La conductibilité électrique est étudiée de façon systématique en fonction du temps, de la température, du champ électrique et de l'épaisseur de la lame. Un chapitre est consacré aux connaissances sur la structure de ces lames. Enfin les auteurs présentent plusieurs théories sur les mécanismes de passage du courant qui expliquent, au moins en partie, les propriétés observées. A. CLAYER.

OLDENBERG (O.), **Introduction à la Physique atomique (Introduction to Atomic Physics)** (1 vol. 16 × 24 cm, 421 pages, Mc Graw-Hill, Londres 1954, $ 4.5e).

Cet Ouvrage est tiré du cours d'introduction à la Physique atomique que l'auteur professe à l'Université de Harvard. C'est la seconde édition qui paraît maintenant.

Il a été écrit à l'intention des étudiants qui ont suivi le cours de l'année préparatoire de Physique et qui possèdent les éléments de la Chimie.

Comme dans la première édition, sept parties inégales divisent l'Ouvrage; toutefois les chapitres sur la Physique nucléaire et les rayons cosmiques ont été entièrement repris. Un court chapitre concernant l'état solide a été ajouté.

La première partie a pour titre : La structure de la matière révélée par la Chimie; y sont abordées : l'hypothèse atomique, la règle d'Avogadro, les notions de valence, poids atomiques, etc.

La seconde partie est consacrée à la théorie cinétique des gaz; la troisième à la structure de l'électricité (détermination de $\frac{e}{m}$ et de $e$ pour l'électron).

La structure de la lumière fait l'objet de la quatrième section.

La cinquième partie, très importante, traite de la structure électronique des atomes : Expérience de Rutherford, spectre de l'atome d'hydrogène, théorie de Bohr, spectres des atomes plus lourds, rayons X, état solide en sont les points les plus importants.

Dans la sixième partie est étudiée la structure nucléaire : isotopie, transmutation et radioactivité naturelle ou artificielle, fission; rayons cosmiques.

Pour conclure, une septième partie traite de la nature ondulatoire de la matière.

Dans un appendice l'auteur donne quelques démonstrations, références....

De nombreux exercices sont proposés tout au long de l'Ouvrage. L'étudiant prend ainsi un contact actif avec les ordres de grandeur des phénomènes décrits.

Au cours du texte l'accent est mis essentiellement sur la compréhension, par opposition à l'acceptation d'autorité. Ce point de vue limite nécessairement la portée d'un Ouvrage d'où les mathématiques sont volontairement exclues mais qui reste un bon livre introductif. J. Badoz.

Lang, **Notes de Laboratoire et d'Atelier (Laboratory and Workshop Notes)**, 1950-1952 (1 vol 14 × 22 cm, 280 pages, Edward Arnold, Londres, 1954, 30 s).

Cet Ouvrage, comme les deux précédents du même type, rassemble des notes sélectionnées et classées, déjà publiées par le *Journal of Scientific Instruments* (cette fois en 1950-1951-1952) (cf. *J. Physique Rad.*, janvier 1953, p. 64).

Comme auparavant certaines notes ont été légèrement condensées et les paragraphes d'introduction omis. Dans ce recueil de notes récentes on a laissé subsister certains noms de fournisseurs ou de fabricants au lieu de les supprimer délibérément comme dans les deux premiers tomes.

Les notes sont réparties en six sections :

— Montages mécaniques;
— Instruments de laboratoires, méthodes et suggestions;
— Montages optiques, spectrométrie infrarouge, montages thermostatiques ou thermiques;
— Montages pour les manipulations de liquides ou de gaz;
— Technique du vide;
— Montages électriques.

Un index alphabétique complète la table des matières et rend l'usage de l'Ouvrage très pratique.

Les lecteurs des tomes précédents connaissent bien les services que leur rendra cet Ouvrage dont la place est dans tous les laboratoires de Physique. J. Badoz.

Basséras (G.) **Exercices et Problèmes de Radioélectricité à l'usage de l'Ingénieur.** Préface du Colonel Blondeau (1 vol. 21 × 30 cm, 264 pages, 259 figures, *Collection Technique du C.N.E.T.*, Eyrolles, Paris, 1954, 2 250 f).

Près de 150 exercices ou problèmes sont groupés dans cet Ouvrage en treize chapitres.

Les exercices du premier chapitre sont résolus à l'aide du calcul matriciel. Exemples : étude d'un filtre en treillis, amplificateur cathode follower, amplificateurs couplés par la cathode, etc.

Le calcul opératoire est employé à la résolution des exercices du chapitre II. Exemples : régime transitoire de deux circuits couplés, protection offerte contre les parasites par un C. O., régime transitoire d'un amplificateur en video fréquence, décharge d'une ligne, etc.

Des exercices sur les circuits constituent le chapitre III.

Le chapitre suivant : « selfs, condensateurs, transformateurs », comprend des exemples de détermination pratique de ces éléments (exemple : calcul d'une self à air avec induction mutuelle, etc.).

Les projets d'alimentations font l'objet du chapitre V (alimentations classiques ou stabilisées).

Les exercices du chapitre VI sont consacrés aux émetteurs de puissance : détermination des conditions de fonctionnement, étude des couplages entre étages, etc.).

Onze exercices traitent ensuite des amplificateurs de tension : étude graphique d'une cathode follower, amplificateurs H. F. à accords décalés, etc.

Dans les chapitres suivants : Critérium de Nyquist; théorème de Routh; oscillateurs (VIII); générateurs de signaux non sinusoïdaux (IX); émission (X); le même souci du concret se retrouve dans les choix des problèmes.

Les trois derniers chapitres sont consacrés à la réception, aux lignes et guides, aux antennes.

Ce livre s'adresse bien, comme l'a voulu l'auteur, à des ingénieurs. Les problèmes qu'il propose ne sont pas de purs exercices de style mais des problèmes concrets.

Certains sont de simples applications de propriétés connues comme l'ingénieur a souvent à en effectuer; d'autres sont de « véritables projets où le lecteur apprend à déterminer logiquement les éléments des circuits ». J. Badoz.

Mayer (H.), **Physique des couches très minces** (Tome II). **Structure, conductibilité électrique, propriétés magnétiques. [Physik dünner schichten** (Teil II). **Strucktur, Electrische leitfähigkeit, magnetische eigenschaften]** (1 vol. 16 × 24 cm, 393 pages, 250 figures, 8 tables, Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft M. H. B., Stuttgart, 1955, 78 D. M.)

Herbert Mayer est actuellement un des meilleurs spécialistes des couches minces. Ses travaux originaux, consacrés en particulier à la mesure du libre parcours moyen des électrons de conductibilité et des électrons photoélectriques au moyen des couches minces, font autorité. Nul doute qu'il était parfaitement qualifié pour rédiger un traité résumant l'ensemble des connaissances acquises à leur sujet.

Le tome I de ce traité, paru en 1950, a connu un très beau succès auprès des spécialistes. Il était consacré à la production des couches minces, à la mesure de leurs épaisseurs et il se terminait par un exposé critique très documenté de leurs propriétés optiques.

Le tome II, qui vient de paraître, comprend tout d'abord près de 180 pages consacrées à la structure des couches minces. Après un exposé d'ensemble sur la formation des couches, leur constitution, l'influence du support, etc., l'auteur examine les divers procédés utilisés pour déterminer leur structure (rayons X, diffraction électronique, etc.) et les résultats qu'ils ont permis d'obtenir.

L'étude de la conductibilité électrique des couches minces a fait l'objet de très nombreux et intéressants travaux, dont les résultats sont exposés dans la seconde partie de l'Ouvrage (150 pages environ). Il y est question successivement de la conductibilité électrique des couches minces homogènes étudiées dans leur plan ainsi que des couches minces contenant des gaz absorbés. Le cas des couches minces isolantes, traversées par l'électricité perpendiculairement à leur plan, est étudié dans un chapitre spécial.

Enfin le reste de l'Ouvrage traite des propriétés magné-

tiques des couches (effet Faraday des couches minces ferromagnétiques, aimantation des couches minces et problèmes connexes).

Une bibliographie comportant près d'un millier de référence termine ce livre qui sera extrêmement utile à tous ceux qui s'intéressent aux couches minces.

P. ROUARD.

TOLANSKY (S.), **Structure microscopique des faces de diamant (Microstructures of diamond surfaces)** (1 vol. 14 × 24 cm, 68 pages, N. A. G. Press Ltd, London W. 6, 1955).

Ce livre est un exposé d'ensemble des travaux effectués au laboratoire de M. Tolansky, par lui-même et ses collaborateurs, sur les microstructures des faces des diamants naturels et de ceux qui ont subi des traitements variés.

Ces travaux ont été effectués au moyen des techniques optiques à haute sensibilité mises au point dans ces dernières années par l'auteur. Il s'agit essentiellement de l'utilisation des phénomènes d'interférence à ondes multiples que l'on obtient grâce à l'augmentation des facteurs de réflexion des surfaces réfléchissantes par le dépôt d'une couche mince d'argent d'épaisseur convenable.

Les franges d'interférence ainsi obtenues sont d'une extrême finesse ce qui permet une analyse très précise de la topographie des surfaces employées. Il est possible, en effet, de mesurer un déplacement de 1/500e de frange, ce qui permet de mettre en évidence des aspérités de 10 Å, alors que la distance séparant deux atomes de diamant est de 1,5 Å.

Cinquante milliards de diamants sont vendus chaque année pour être utilisés soit dans l'industrie, soit en bijouterie, soit dans la recherche scientifique. La présente monographie présente un grand intérêt pour tous ceux : minéralogistes, lapidaires, chimistes, ingénieurs, physiciens qui utilisent des diamants ou effectuent des recherches sur eux.

Après avoir décrit rapidement les techniques optiques utilisées et donné quelques caractéristiques des diamants, l'auteur résume les résultats obtenus dans l'étude de la topographie des faces des cristaux octaédriques naturels. Il insiste tout particulièrement sur les « triangles » : petits affaissements régulièrement orientés qui ont presque invariablement la forme de triangles équilatéraux avec des côtés parfaitement rectilignes. Il en discute la nature et étudie les régions qui les entourent.

Les figures de croissance qui existent sur les faces de l'octaèdre retiennent ensuite son attention ainsi que certaines discontinuités rectilignes.

Les chapitres suivants sont consacrés aux figures de corrosion, au clivage du diamant, aux empreintes obtenues en exerçant sur lui une pression et enfin à l'étude du polissage.

L'ensemble est illustré de magnifiques photographies et d'une lecture très aisée. Une très courte bibliographie termine le volume.

P. ROUARD.

JANET (P.), **Problèmes et exercices d'électricité générale et de machines électriques.** Nouvelle édition revue par G. NASSE (1 vol. 14 × 23 cm, VI-409 pages, Gauthier-Villars, Paris, 1953, 2 700 f).

Ce recueil de problèmes est une occasion pour les auteurs de traiter l'ensemble des questions d'un cours d'électricité générale. Des exercices gradués se rapportant à des problèmes physiques concrets illustrent en neuf chapitres, l'électrostatique, le magnétisme, la loi des courants permanents, l'induction, la dynamo à courant constant, les champs alternatifs sinusoïdaux et les champs magnétiques tournants.

Les exercices d'un même chapitre sont précédés d'une étude théorique des phénomènes considérés.

Ce livre qui est d'ailleurs une réédition doit rendre les plus grands services aux étudiants et aux élèves des écoles d'ingénieurs.

J. UEBERSFELD.

DERIBÉRÉ (M.), **Les applications pratiques des rayons infrarouges** (1 vol. 17 × 24 cm, XI-435 pages, Dunod, Paris, 1954, 3 700 f).

Ce livre constitue une mise au point sur les aspects pratiques du problème de l'infrarouge. Les questions traitées sont d'ailleurs rattachées à des considérations théoriques.

Si les applications à la physique pure sont à dessein passées sous silence (astrophysique, structure des atomes et molécules), les applications à l'analyse chimique, à la dessiccation, à la biologie et à certaines thérapeutiques sont développées en détail.

Des considérations sur la photographie infrarouge complètent l'exposé.

J. UEBERSFELD.

SMITH (C. J.), **Électricité et magnétisme** (1 vol. 14 × 22 cm, 744 pages, Edward Arnold, London, 1954, 45 sh).

En dix-huit chapitres, ce livre étudie la plupart des phénomènes électriques et magnétiques en laissant toutefois de côté les problèmes du champ électromagnétique.

Il faut noter que les notions théoriques et expérimentales se complètent harmonieusement. Les trois premiers chapitres sont consacrés à l'électrostatique et aux diélectriques, les dix chapitres suivants au magnétisme et aux lois des courants permanents.

Quelques phénomènes transitoires sont étudiés au chapitre XIV, tandis que les questions relatives aux courants alternatifs sont développées dans les deux chapitres suivants :

Le chapitre XVII est consacré à l'électrolyse et le dernier chapitre aux unités électriques.

J. UEBERSFELD.

LANSRAUX (G.), **Diffraction instrumentale** (1 vol 16 × 24 cm, 75 pages, Éditions de la *Revue d'Optique théorique et instrumentale*, Paris, 1953, 300 f).

L'auteur s'est proposé de faire une mise au point sur le rôle de la diffraction dans la formation des images optiques.

Extraits du sommaire :

— Introduction de la correspondance pupille-figure de diffraction. Cette relation est établie à partir des hypothèses de Fresnel. L'auteur introduit la notion de variations locales de transparence (filtres d'amplitude).

— La seconde partie comprend des développements mathématiques destinés à justifier des propriétés physiques connues et à établir des règles d'intérêt pratique.

— La troisième partie est consacrée à l'étude du centre de la figure de diffraction ainsi qu'à sa détermination numérique dans le cas de faibles aberrations.

— La région lointaine de l'image est étudiée dans la quatrième partie.

— La dernière partie de l'Ouvrage groupe quelques méthodes d'appréciation des images parmi lesquelles un test de l'auteur : le niveau d'intensité modulée.

Très clairement écrit et fortement charpenté, cet Ouvrage intéressera tous ceux qui suivent les problèmes de diffraction instrumentale. L'auteur s'est efforcé de donner, avec les développements théoriques que ces questions appellent, des formules simples qui permettent les calculs numériques. Il a en outre, introduit des considérations originales : il a, par exemple, développé une méthode pour obtenir rapidement l'expression aymptotique de l'éclairement suivant une direction radiale de la figure de diffraction dans la région lointaine de l'image; il a établi un test pour juger de la qualité intrinsèque d'une figure de diffraction ou de la déformation qu'elle subit de la part d'un récepteur (niveau d'intensité modulée),

J. BADOZ.

Cox (R. T.), **Mécanique statistique des changements irréversibles** (*Statistical mechanics of irreversible change*) (1 vol. relié 15,5 × 23 cm, 130 pages, John Hopkins Press, Baltimore, 1955, 5d).

La thermodynamique et la mécanique statistique des phénomènes irréversibles font l'objet de plusieurs Ouvrages récents. Celui-ci ne prétend pas les remplacer, mais approfondit certaines questions. I. Définitions de base, systèmes microcanoniques et canoniques; II. Forces de viscosité et mouvement brownien; III. Phénomène de transport (de matière, d'énergie, de chaleur, d'entropie); IV. Approche de l'équilibre, sous l'effet de contraintes. Cet Ouvrage est clair, mais très algébrique. La thermodynamique théorique est, ne l'oublions pas, une mine inépuisable d'équations différentielles qui risquent de masquer la discussion physique des faits et des hypothèses.

J. Winter.

Baumgardt (E.), **L'hygiène de la vue** (1 vol. 11,5 × 17,5 cm, 128 pages, Presses Universitaires de France, Paris, 1954).

Après quatre chapitres préliminaires sur la lumière, les sources lumineuses, la physiologie de la vision, et le rôle du sens de la perception du monde extérieur, l'auteur entame le sujet indiqué par le titre de son livre, auquel il consacre trois chapitres intitulés : le confort visuel, l'éclairement utile, les dix commandements de l'hygiène visuelle. Il y traite principalement d'éclairagisme, de façon claire et vivante. Un dernier chapitre est consacré à l'emploi des tubes fluorescents. L'Ouvrage constitue le volume n° 614 de la collection « *Que sais-je ?* ».

J. L.

Guilbaud (C. T.), **La cybernétique** (1 vol. 11,5 × 17,5 cm, 135 pages, Presses Universitaires de France, Paris, 1954).

Dans ce petit livre (n° 638 de la collection « *Que sais-je ?* ») l'auteur, tout en moquant spirituellement l'engouement d'un certain public pour une nouvelle et mystérieuse « Superscience », appelée à renouveler l'ensemble de nos connaissances et de nos modes d'action sur le monde, nous donne deux intéressants exposés l'un, assez bref, sur *Réseaux et circuits*, l'autre, plus étendu, sur *Signaux et messages*. Il termine par des considérations d'un plaisant scepticisme sur *Pilotes, stratèges et joueurs* où il rattache la cybernétique à l'analyse opérationnelle. Dans sa conclusion il affirme sagement que « s'il s'agit de transformer la biologie, c'est l'affaire des biologistes, de transformer la physique, celle des physiciens ».

J. L.

Sannié (Ch.), **La recherche scientifique du criminel** (1 vol. 11,5 × 16,5 cm, 218 pages, Armand Colin, Paris, 1954).

Ce livre se rattache à la physique par l'utilisation de certains appareils (microscope, microscope électronique, spectrographe, etc.), de certaines techniques (mesures de conductibilité, de pouvoir rotatoire ou d'indices de réfraction) et de certains phénomènes (luminescence, absorption de l'infrarouge, etc.).

J. L.

Gillam (A.), Stern (E. S.) et Jones (E. R. H.), **Les spectres moléculaires d'absorption en chimie organique (An introduction to electronic absorption spectroscopy in organic chemistry)** (1 vol. 15 × 22 cm, 284 pages, Edward Arnold, Londres, 1954, 40 sh).

Ce petit livre clair et agréablement présenté ne prétend pas donner un exposé complet des connaissances actuelles en spectroscopie moléculaire, mais seulement indiquer et illustrer les principes élémentaires et les conceptions modernes sur la photométrie des spectres d'absorption des composés organiques, et ses principales applications.

Il se divise en trois parties. La première donne les principes et les lois fondamentales relatives à l'absorption de la lumière, et les méthodes expérimentales pour déterminer les spectres d'absorption en solution. La seconde étudie l'absorption lumineuse de composés contenant des chromophores relativement simples, pris dans chacune des principales séries : aliphatique, alicyclique, aromatique et aussi hétérocycliques.

La troisième montre des exemples d'applications de la spectrophotométrie d'absorption à l'identification des composés, à l'analyse quantitative et à l'étude des structures moléculaires.

Une bibliographie du sujet et des tables d'auteurs et des matières terminent le volume.

J. L.

Buchdahl (H. A.), **Calcul des aberrations optiques (Optical aberration coefficients)** (1 fol. 16 × 23 cm, xii et 336 pages, Oxford University Press, London, 1954, 50 sh).

Les trois parties de l'Ouvrage traitent pour les systèmes optiques de révolution : 1° des aberrations en lumière monochromatiques du premier, deuxième et troisième ordre (aberrations de sphéricité, coma, astigmatisme et courbure du champ); 2° des aberrations chromatiques; 3° du calcul des dérivées des coefficients d'aberration par rapport aux courbures, aux indices et aux pouvoirs dispersifs. Les effets des variations des positions des plans de l'objet, des diaphragmes et de l'image sont complètement étudiés. L'auteur dit n'employer que des méthodes d'algèbre élémentaire. Il reconnaît que certaines pages de son livre ont un aspect « quelque peu terrifiant », mais affirme que les calculs numériques faits suivant ses méthodes sont « remarquablement courts ». L'Ouvrage comporte une série de tables numériques, des exemples d'application, une bibliographie assez brève et un index alphabétique des matières. Il représente un travail considérable. L'édition en est extrêmement soignée.

J. L.

Grimsehl, **Cours de Physique (Lehrbuch der Physik)** (2 vol. 17 × 23 cm), ix - 622 pages, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1954, 21, 4 D. M.).

Quinzième édition du cours de Physique classique, de niveau voisin de celui de la Propédeutique. Le premier volume dont il s'agit ici, traite de la mécanique, y compris la mécanique des fluides, de la thermodynamique et de l'acoustique. L'Ouvrage a été remis à jour par le Professeur W. Schalreuter, qui a tenu à en conserver l'esprit, mais l'a complété en y utilisant les éléments du calcul vectoriel, qui font l'objet d'un court chapitre en Appendice et en y introduisant divers compléments, par exemple en thermodynamique la notion d'enthalpie et en acoustique une étude des grandeurs caractéristiques du champ sonore et quelques paragraphes sur les ultrasons et leurs applications : à ce sujet, si le sifflet de Galton est indiqué, aucune contribution française n'est, bien entendu, mentionnée.

J. L.

*Le Gérant :* Maurice Blondin. 148325 Imp. Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins, Paris. — 1955.